Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

16. Oktober 2008

Höhere Mathematik II für den Bachelorstudiengang Automobilproduktion

Hausaufgabe 1: Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Letzter Abgabetermin: 01. November 2008
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/712)
Bitte die Arbeiten oben mit einer grünen Linie kennzeichnen!

1. In geringer Höhe h über der Erdoberfläche gilt für die Geschwindigkeit der Abnahme des Luftdruckes p unter Vernachlässigung der Gravitationskräfte und bei konstanter Temperatur die Beziehung

   $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, p.$$

   Dabei bezeichnen p_0 bzw. ρ_0 den Druck bzw. die Dichte der Luft in der Höhe $h = 0$ und g die Erdbeschleunigung. Bestimmen Sie eine Funktion $p = p(h)$, die die Bedingung $p(0) = p_0$ erfüllt und welche die Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe beschreibt.

2. In einem Behälter befinden sich 100 l einer Lösung, die 10 kg Salz enthält. In den Behälter fließt stetig Wasser zu (5 l/min), welches sich gleichmäßig mit der Lösung vermischt. Das Gemisch fließt mit einer Geschwindigkeit von 5 l/min wieder aus. Wie viel Salz ist nach einer Stunde im Behälter?

3. Lösen Sie die Differenzialgleichungen

   a) $y' + t^2 y = 0,$ b) $y' = y \tan t,$

   c) $y' = (y-9)\cos t,$ d) $y' - 3\,\dfrac{y}{t} = t.$

4. Lösen Sie die Anfangswertprobleme

   a) $3y^2y' + 16t = 2t\,y^3, \qquad y(0) = 1,$

   b) $y' + 2t\,y = 2t^2\mathrm{e}^{-t^2}, \qquad y(0) = 1.$

5. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Menge N_0 einer radioaktiven Substanz vorhanden. Nach 30 Tagen sind 50 % der Ausgangsmenge N_0 zerfallen. Nach wie viel Tagen ist noch 1 % von N_0 vorhanden?

   HINWEIS: Verwenden Sie die Beispiele 1.4 und 1.11 aus dem Vorlesungsskript.

6. Eine Bakterienpopulation befinde sich in einer Nährlösung und habe zur Zeit t die Größe $P(t)$. Nach Ablauf des Zeitintervalls Δt hat sie sich um $\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$ Bakterien vermehrt.

   Annahme: Bei kleinen Zeitspannen Δt sei die Vermehrung ΔP proportional zum Anfangsbestand $P(t)$ und zum Zeitintervall Δt.

   Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die das Wachstumsgesetz der Bakterienpopulation beschreibt, und geben Sie die allgemeine Lösung an.

7. Die vereinfachte CLAUSIUS-CLAPEYRONsche Differenzialgleichung, die den Übergang eines Stoffes von einem Aggregatzustand zum anderen beschreibt, hat die Form

   $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\lambda\, p}{R T^2}.$$

Dabei bezeichnet λ die spezifische Umwandlungswärme des Phasenüberganges, R die allgemeine Gaskonstante, p den Druck und T die (absolute) Temperatur. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung an und lösen Sie das Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung $p(T_0) = p_0$.

8. **Zusatzaufgabe für Fans** (Bearbeitung freiwillig)

   Bestimmen Sie alle Kurven mit der Eigenschaft, dass der Flächeninhalt A eines Trapezes, welches von den Koordinatenachsen, der Tangente im Berührungspunkt und der Ordinate des Berührungspunktes gebildet wird, den konstanten Wert $A = 3\,d^2$ besitzt.

   HINWEIS: Der Flächeninhalt eines Trapezes mit den parallelen Seiten a, b und der Höhe h ist $A = \dfrac{1}{2}(a+b)h$, also gilt $\dfrac{1}{2}(a+b)h = 3d^2$.