HSD Dr. S. Handrock
Fakultät für Mathematik
TU Chemnitz

Arbeitsblatt 1 zur Vorlesung Höhere Mathematik III für den Bachelorstudiengang Automobilproduktion

Kombinatorik

1. Permutationen

Eine Anordnung von n Elementen heißt **Permutation**. Problem:

- Wie viele unterscheidbare Permutationen von n Elementen gibt es ?

Es sind zwei Fälle zu betrachten:

1.1 Alle n Elemente sind unterscheidbar: **Permutationen ohne Wiederholung**

1.2 Nicht alle n Elemente sind unterscheidbar: **Permutationen mit Wiederholung**

1.1 Permutationen ohne Wiederholung

Eine Anordnung wird erzeugt, indem man n Anordnungsplätze mit jeweils einem Element besetzt. Für den ersten Anordnungsplatz gibt es n Möglichkeiten. Zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es für den zweiten Anordnungsplatz $n-1$ Möglichkeiten. Zu jeder Möglichkeit für die ersten zwei Plätze gibt es für den dritten Platz $n-2$ Möglichkeiten usw. Die Anzahl der Besetzungsmöglichkeiten der n Anordnungsplätze, d.h. die Anzahl P_n der **Permutationen ohne Wiederholung** ist also

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

1.2 Permutationen mit Wiederholung

Die n Elemente lassen sich in k Klassen einteilen. Dabei gilt:

- Jedes Element ist von allen Elementen aus den anderen Klassen unterscheidbar.
- Die Elemente ein und derselben Klasse sind nicht unterscheidbar.

Die Anzahl der Elemente der i-ten Klasse sei n_i $(i = 1, \ldots, k)$. Zu jeder Anordnung der n Elemente gibt es weitere Anordnungen, die von der gegebenen Anordnung nicht unterscheidbar sind und durch Vertauschung der Elemente einer Klasse entstehen. Die Elemente der ersten Klasse lassen sich auf $n_1!$ verschiedene Arten anordnen. Durch Vertauschung der Elemente der ersten Klasse bei einer gegebenen Anordnung erhält man $n_1!$ Anordnungen, die nicht unterscheidbar sind. Durch Vertauschungen in allen k Klassen bei einer gegebenen Anordnung erhält man also insgesamt $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ Anordnungen, die nicht unterscheidbar sind. Dies gilt für jede gegebene Anordnung. Die Anzahl der Anordnungen insgesamt ist $n!$ und gleich der Anzahl m der unterscheidbaren Anordnungen multipliziert mit $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$, also $n! = m \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$. Die Anzahl m der unterscheidbaren Anordnungen ist aber gleich der Anzahl $P_{n,n_1,n_2,\ldots,n_k}$ der **Permutationen mit Wiederholung**, also ist

$$P_{n,n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

2. Variationen

Aus n verschiedenen Elementen werden nacheinander k Elemente ausgewählt und und entnommen. Die Reihenfolge der Entnahme bzw. die Anordnung der entnommenen Elemente spielt eine Rolle. Eine derartige Auswahl mit einer Anordnung heißt **Variation** k-ter Ordnung aus n Elementen. Man spricht auch von einer **geordneten Stichprobe** vom Umfang k aus einer Grundgesamtheit vom Umfang n. Problem:

- Wie viele verschiedene Variationen k-ter Ordnung aus n Elementen gibt es ?

Es sind zwei Fälle zu betrachten:

2.1 Die Entnahme erfolgt ohne Zurücklegen: **Variationen ohne Wiederholung**

2.2 Die Entnahme erfolgt mit Zurücklegen: **Variationen mit Wiederholung**

2.1 Variationen ohne Wiederholung

Eine Anordnung wird erzeugt, indem man k Anordnungsplätze mit jeweils einem Element besetzt. Für den ersten Anordnungsplatz gibt es n Möglichkeiten. Zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es für den zweiten Anordnungsplatz $n-1$ Möglichkeiten usw. Die Anzahl der Besetzungsmöglichkeiten der n Anordnungsplätze, d.h. die Anzahl $V_{n,k}$ der **Variationen** k-ter Ordnung aus n Elementen **ohne Wiederholung** ist also

$$V_{n,k} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2.2 Variationen mit Wiederholung

Bei jeder Entnahme eines Elementes, d.h. für jeden Anordnungsplatz gibt es n Möglichkeiten. Die Anzahl der Besetzungsmöglichkeiten der n Anordnungsplätze, d.h. die Anzahl $V^W_{n,k}$ der **Variationen** k-ter Ordnung aus n Elementen **mit Wiederholung** ist also

$$V^W_{n,k} = n^k.$$

3. Kombinationen

Aus n verschiedenen Elementen werden k Elemente ausgewählt und entnommen. Die Reihenfolge der Entnahme bzw. die Anordnung der entnommenen Elemente spielt keine Rolle. Eine derartige Auswahl ohne Anordnung heißt **Kombination** k-ter Ordnung aus n Elementen. Man spricht auch von einer **ungeordneten Stichprobe** vom Umfang k aus einer Grundgesamtheit vom Umfang n. Problem:

- Wie viele verschiedene Kombinationen k-ter Ordnung aus n Elementen gibt es ?

Es sind zwei Fälle zu betrachten:

3.1 Die Entnahme erfolgt ohne Zurücklegen: **Kombinationen ohne Wiederholung**

3.2 Die Entnahme erfolgt mit Zurücklegen: **Kombinationen mit Wiederholung**

3.1 Kombinationen ohne Wiederholung

Die k verschiedenen Elemente einer Kombination k-ter Ordnung ohne Wiederholung lassen sich auf $k!$ verschiedene Arten anordnen. Jede solche Anordnung ist eine Variation k-ter Ordnung ohne Wiederholung. Die Anzahl $V_{n,k}$ der Variationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung ist die Anzahl $C_{n,k}$ der Kombinationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung multipliziert mit der Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von k verschiedenen Elementen: $V_{n,k} = k!C_{n,k}$, also ist

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

3.2 Kombinationen mit Wiederholung

Die Anzahl $C^W_{n,k}$ der Kombinationen mit Wiederholung ist (ohne Nachweis)

$$C^W_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$