

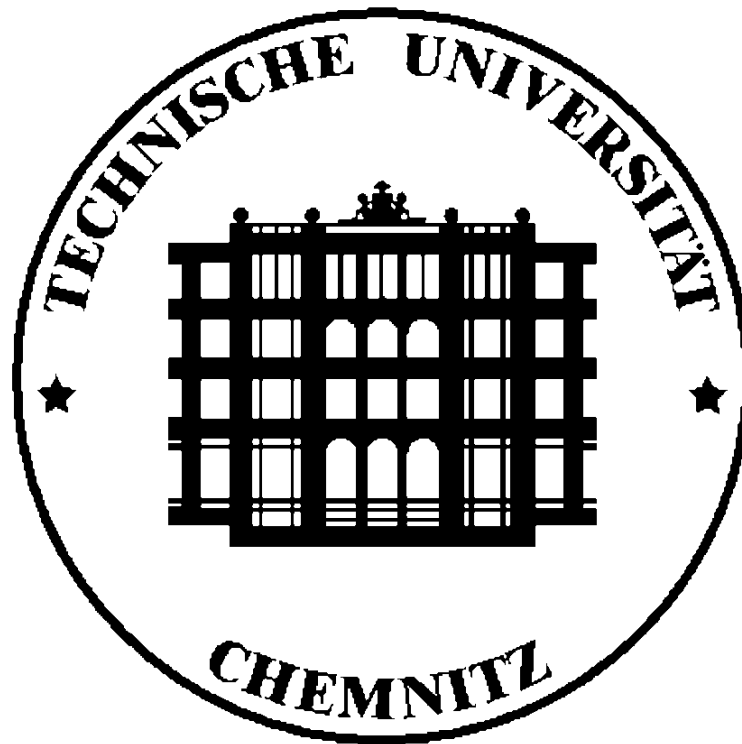
Technische Universität Chemnitz

Übungsaufgaben

zur

Wahrscheinlichkeitsrechnung

und Statistik



Fakultät für Mathematik - Bereich Statistik

Inhaltsverzeichnis

1	Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten	2
1.1	Grundelemente aus Mengenlehre und Kombinatorik	2
1.2	Zufällige Ereignisse	3
1.3	Axiomensystem und Berechnungsmethoden	4
1.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	6
1.5	Unabhängige Ereignisse	7
2	Zufallsgrößen	10
2.1	Diskrete Zufallsgrößen	10
2.2	Stetige Zufallsgrößen	14
2.3	Funktionen von Zufallsgrößen	17
2.4	Grenzverteilungssätze	19
3	Grundlagen der mathematischen Statistik	21
3.1	Statistische Schätzverfahren	21
3.2	Statistische Prüfverfahren	23
4	Wiederholungsaufgaben	26

1 Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

1.1 Grundelemente aus Mengenlehre und Kombinatorik

1.1.1 Gegeben seien jeweils zu einer Menge Ω reeller Zahlen zwei Teilmengen A und B in folgender Weise:

- a) $\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}$, $A = \{4, 5, 6, 7, 9, 11\}$, $B = \{3, 5, 9, 20\}$
- b) $\Omega = [-1, 3]$, $A = [0, 1)$, $B = (\frac{1}{2}, 2]$
- c) $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 3\}$, $B = [0, \infty)$.

Bilden Sie die Mengen \overline{A} , \overline{B} , $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $B \cap \overline{A}$, $(\overline{A \cup B}) \cap \overline{B}$, $B \cup (\overline{B \cap A})$.

- 1.1.2
- a) Wie viel voneinander verschiedene dreistellige (ganze, positive) Zahlen kann man mit Hilfe der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden?
 - b) Welches Ergebnis erhält man bei Aufgabe a), wenn jede Ziffer nur höchstens einmal in der zu bildenden Zahl vorkommen darf?

1.1.3 Wie viel verschiedene Tippscheine gibt es

- a) beim Lotto (6 aus 49),
- b) bei der Glücksspirale (7-stellige Zahl),
- c) bei der 11er Wette (Fußballtoto)?

1.1.4 Eine Person habe beim Lotto (6 aus 49) alle möglichen Tips gespielt. Wie oft hat sie dann:

- a) 6 richtige Zahlen,
- b) 3 richtige Zahlen,
- c) insgesamt Gewinnscheine?

1.1.5 In Chemnitz werden Kraftfahrzeuge gewöhnlich in der Weise

$$C - xx \ yyy$$

gekennzeichnet, wobei x die Großbuchstaben des Alphabets und y eine einstellige positive ganze Zahl darstellen. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass für die Großbuchstaben des Alphabets jeweils nur 23 verschiedene Buchstaben zur Anwendung kommen, die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten der Kfz-Kennzeichnung.

- 1.1.6 In der Umgebung eines Urlaubsortes sollen 15 Wanderwege durch je zwei farbige, parallele Striche gekennzeichnet werden. Wie viel verschiedene Farben benötigt man mindestens, wenn gleichfarbige Paare auftreten dürfen. Geben Sie zwei verschiedene Lösungen an, und diskutieren Sie diese Ergebnisse.

1.2 Zufällige Ereignisse

- 1.2.1 Die Arbeit eines Kraftwerkes werde durch drei unabhängig voneinander arbeitende Kontrollsysteme überwacht, die jedoch auch einer gewissen Störanfälligkeit unterliegen. Es bezeichne S_i das Ereignis, dass das i -te System störungsfrei arbeitet ($i = 1, 2, 3$).

- a) Drücken Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse S_1 , S_2 und S_3 aus:

A : Alle drei Systeme arbeiten störungsfrei.
 B : Kein System arbeitet störungsfrei.
 C : Mindestens ein System arbeitet störungsfrei.
 D : Genau ein System arbeitet störungsfrei.
 E : Höchstens zwei Systeme sind gestört.

- b) Welche der unter a) genannten Ereignisse können als Elementarereignisse angesehen werden?

- c) Aus wie viel Elementarereignissen bestehen die Ereignisse D , C bzw. der Ereignisraum Ω ?

- 1.2.2 Bei der Gütekontrolle von zwei Graugussteilen werde für jedes Teil festgestellt, ob es sofort verwendbar ist, ob sich Nacharbeit erforderlich macht oder ob das Teil Ausschuss ist.

- a) Geben Sie alle Elementarereignisse an.

- b) Stellen Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der Elementarereignisse dar:

A : Beide Teile sind sofort verwendbar.
 B : Es ist keine Nacharbeit erforderlich.
 C : Höchstens eines der beiden Teile ist Ausschuss.
 D : Mindestens eines der beiden Teile ist Ausschuss.

- c) Welche Bedeutung haben die Ereignisse

$$E_1 = A \cup B, E_2 = A \cup D, E_3 = A \cap B, E_4 = A \cap \overline{C}, E_5 = \overline{A \cap D} ?$$

- 1.2.3 Drei Transistoren werden auf das Erreichen eines bestimmten Stromverstärkungsfaktors überprüft. Das Ereignis A liege vor, wenn mindestens ein Transistor nicht den geforderten Wert besitzt, das Ereignis B liege vor, wenn alle drei Transistoren den geforderten Wert erreichen. Was bedeuten dann die Ereignisse $A \cup B$ und $A \cap B$?

- 1.2.4 Eine Fertigungsstraße bestehe aus einer Maschine vom Typ I, vier Maschinen vom Typ II und zwei Maschinen vom Typ III. A bzw. B_k bzw. C_j ($k = 1, 2, 3, 4$ $j = 1, 2$) bezeichne das Ereignis, dass die Maschine vom Typ I bzw. die k -te Maschine vom Typ II bzw. die j -te Maschine vom Typ III intakt ist. Die Fertigungsstraße sei arbeitsfähig, wenn von jedem Maschinentyp mindestens eine intakt ist. Dieses Ereignis werde mit D bezeichnet. Beschreiben Sie die Ereignisse D und \bar{D} mit Hilfe der Ereignisse A, B_k, C_j und den Ereignisoperationen.
- 1.2.5 Zwei Schachspieler spielen eine Partie. Das Ereignis A liege vor, falls der erste Spieler gewinnt, das Ereignis B falls der zweite gewinnt. Welche zufälligen Ereignisse wären noch hinzufügen, damit eine Ereignisalgebra entsteht?
- 1.2.6 A und B seien beliebige zufällige Ereignisse in einem Ereignisraum Ω . Durch welche Ereignisse wären A und B zu ergänzen, um eine Ereignisalgebra zu erhalten?
- 1.2.7 Aus einer laufenden Produktion werden vier Werkstücke zufällig ausgewählt. Es bezeichne A das Ereignis, dass mindestens eines der ausgewählten Werkstücke Ausschuss ist, B das Ereignis, dass mindestens zwei der ausgewählten Werkstücke Ausschuss sind. Konstruieren Sie die kleinste Ereignisalgebra, die die Ereignisse A und B enthält, und interpretieren Sie die Ereignisse dieser Ereignisalgebra.

1.3 Axiomensystem und Berechnungsmethoden

- 1.3.1 Für die Ereignisse A und B seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = 0.25, \quad P(B) = 0.45, \quad P(A \cup B) = 0.5.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap \bar{B}), \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad \text{und} \quad P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)).$$

- 1.3.2 Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

- a) Für den Fall, dass das Eintreten des Ereignisses A stets das Eintreten des Ereignisses B nach sich zieht, gilt

$$P(A) \leq P(B).$$

- b) Für den Fall, dass das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse A und B stets das Eintreten des Ereignisses C nach sich zieht, gilt

$$P(C) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

- 1.3.3 Ein Würfel, dessen Seitenflächen gleichartig gefärbt sind, werde in 1000 kleine Würfel einheitlicher Größe zerlegt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Würfel auf mindestens einer Seite gefärbt ist?
- 1.3.4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Werfen von zwei Würfeln eine Augensumme zu erzielen, die größer oder gleich 10 ist?
- 1.3.5 Was ist wahrscheinlicher:
- a) Beim Werfen von vier Würfeln auf wenigstens einem eine Sechs zu erzielen, oder
 - b) bei 24 Würfeln von zwei Würfeln wenigstens einmal zwei Sechsen zu erhalten?
- 1.3.6 Ein Gütekontrolleur entnehme einem aus N Teilen bestehenden Prüfling nacheinander ohne Zurücklegen n Teile.
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen n Teilen genau m Ausschussteile befinden, falls das Prüfling M Ausschussteile enthält?
 - b) Berechnen Sie für $N = 100$, $M = 4$ und $n = 10$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den zehn ausgewählten Teilen mindestens ein Ausschussteil befindet!
- 1.3.7 Wie oft ist mit einem Würfel mindestens zu würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Sechs zu erzielen, größer ist als 0.5 ?
- 1.3.8 Aus 20 vorhandenen Bauteilen, von denen zwei unbrauchbar sind, werden vier zufällig ausgewählt und in ein Gerät eingebaut. Dieses Gerät arbeite nur dann, wenn mindestens drei der eingebauten Bauteile einwandfrei sind. Berechnen Sie dafür die Wahrscheinlichkeit.
- 1.3.9 Bei einem Sturm werde eine Telefonleitung an unbekannter Stelle zwischen dem 40. und 70. Kilometer unterbrochen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Unterbrechung zwischen dem 50. und dem 55. Kilometer befindet, wenn gleichlangen Intervallen zwischen dem 40. und 70. Kilometer gleiche Unterbrechungswahrscheinlichkeiten entsprechen?
- 1.3.10 Ein Gitter bestehe aus rechtwinklig zueinander angeordneten zylindrischen Stäben mit dem Radius r_s . Der Abstand zwischen den Stabachsen betrage a bzw. b . Eine Kugel vom Radius r_k werde senkrecht zur Gitterebene zufällig auf das Gitter geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel durch das Gitter fällt, ohne einen Stab zu berühren?

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes)

- 1.4.1 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Netzspannung einen bestimmten Spannungswert überschreitet, sei 0.2. 50% eines bestimmten Fernsehgerädetyps reagieren dann mit Bildstörungen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Überspannungswert vorliegt und das Fernsehgerät Bildstörungen zeigt?
- 1.4.2 Mit der Wahrscheinlichkeit p befinde sich ein Buch in einem der acht Regale eines Lesesaales, mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ werde es gerade benutzt. Wie groß ist unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Buch im achten Regal doch noch gefunden wird, wenn es in den anderen sieben bereits vergeblich gesucht wurde?
- 1.4.3 Ein Betrieb stelle zwei gleichartige Computertypen her, die sich im Hinblick auf ihre Zuverlässigkeit unterscheiden. Ein Computer vom Typ I überstehe mit der Wahrscheinlichkeit 0.95 die Garantiezeit ohne Reparatur, ein Computer des Typs II nur mit der Wahrscheinlichkeit 0.8. Auf den Typ I entfallen 30% der Gesamtproduktion.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewählter Computer die Garantiezeit ohne Reparatur übersteht?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein während der Garantiezeit reklamierter Computer vom Typ I?
- 1.4.4 An drei Fertigungsautomaten werden Disketten gefertigt, wobei die Stückzahl pro Zeiteinheit an allen drei Automaten gleich groß sei. Der erste Automat werde zweischichtig besetzt und arbeite mit einer Fehlerquote von 4%. Der zweite Automat arbeite bei einer Fehlerquote von 2% in drei Schichten, während der dritte Automat bei einer Fehlerquote von 5% nur einschichtig bedient werde.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig der Tagesproduktion entnommene Diskette fehlerhaft ist?
 - Eine zufällig ausgewählte Diskette sei einwandfrei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde diese Diskette von dem ersten oder dritten Automaten gefertigt?
- 1.4.5 Bei der Analyse von Motorausfällen ergab sich, dass in 50% aller Fälle eine Störung der Zündanlage, in 30% aller Fälle ein Fehler an der Kraftstoffzufuhr und in den restlichen Fällen eine sonstige Störung vorlag. Ein Pannendienst kann bei diesen Ursachen im Durchschnitt in 50%, 30% bzw. 5% aller Fälle helfen.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Pannendienst beim Ausfall des Motors helfen kann?
- b) Beim Ausfall des Motors konnte der Pannendienst nicht helfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Störung an der Zündanlage vorlag?
- 1.4.6 Bei einer Eignungsprüfung für eine bestimmte Tätigkeit sei ein Eignungstest zu bestehen. Ein für die Tätigkeit geeigneter Bewerber bestehe den Test mit der Wahrscheinlichkeit 0.9, ein ungeeigneter Bewerber jedoch nur mit der Wahrscheinlichkeit 0.2.
Erfahrungsgemäß erweisen sich ohne Eignungstest nur 40% der Bewerber für die Tätigkeit als geeignet.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann ein Bewerber, der den Test bestanden hat, tatsächlich für die Tätigkeit geeignet?
- 1.4.7 Bei der Endkontrolle von produzierten Haushaltgeräten eines bestimmten Typs sei der folgende Sachverhalt bekannt:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fehlerfreies Gerät als fehlerfrei eingestuft werde, betrage 0.99. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Gerät als defekt erkannt werde, sei gleich 0.9. Im Mittel sei von 20 Geräten eins defekt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle als fehlerfrei bezeichnetes Gerät auch wirklich fehlerfrei ist.

1.5 Unabhängige Ereignisse

(Elementare Aufgabenstellungen der Zuverlässigkeitstheorie)

- 1.5.1 Es seien A und B stochastisch unabhängige Ereignisse. Sind dann auch die Ereignisse A und \overline{B} , \overline{A} und B bzw. \overline{A} und \overline{B} stochastisch unabhängig?
- 1.5.2 Ein Motor springe bei jedem Startversuch mit der Wahrscheinlichkeit p an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- a) der Motor erst beim zweiten Starten anspringt,
b) der Motor beim zweiten Starten anspringt, wenn er beim ersten Startversuch nicht angesprungen ist,
c) der Motor nicht mehr als zweimal gestartet werden muss, bis er anspringt.
- 1.5.3 Ein Arbeiter bediene gleichzeitig drei unabhängig voneinander arbeitende Maschinen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Verlaufe einer Stunde die Maschine 1, 2 bzw. 3 durch den Arbeiter umgerüstet werden muss, betrage $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ bzw. $\frac{3}{4}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Stunde

- a) keine der drei Maschinen umgerüstet werden muss,
- b) alle drei Maschinen umgerüstet werden müssen,
- c) genau eine Maschine umgerüstet werden muss,
- d) mindestens zwei Maschinen umgerüstet werden müssen.

1.5.4 Für die Abnahme von Werkzeugmaschinen werde folgendes Prüfverfahren vereinbart. Wenn die Maschine bei mindestens einer von m unabhängigen Prüfungen nicht die geforderten Parameterwerte aufweist, werde sie nicht abgenommen. Es sei bekannt, dass bei jeder einzelnen Prüfung ein Fehler an der Werkzeugmaschine nur mit einer Wahrscheinlichkeit q erkannt wird.

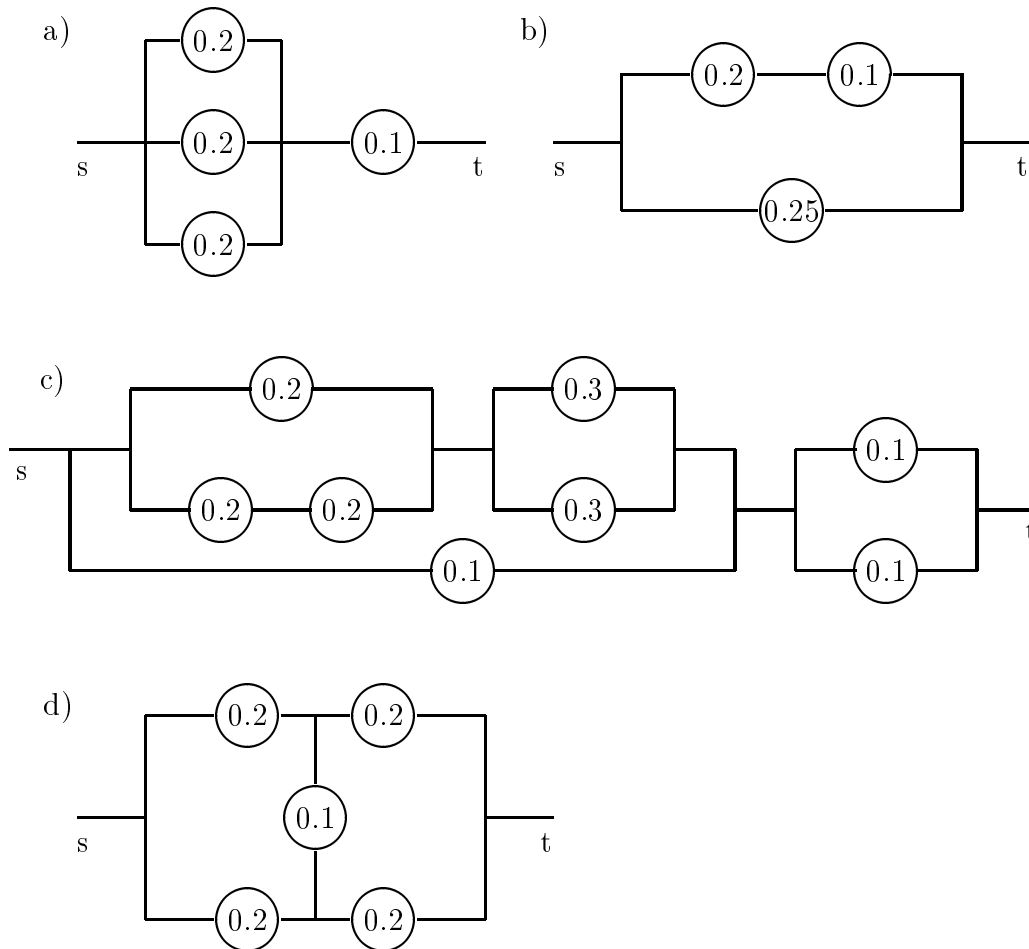
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Maschine nicht ausgeliefert wird?
- b) Berechnen Sie für $m = 3$ und $q = 90\%$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler an der Maschine nicht entdeckt wird.

1.5.5 Ein Gerät bestehe aus 3 nacheinander angeordneten Teilsystemen, die unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten 0.3, 0.4 bzw. 0.6 ausfallen können. Das Gerät sei nur funktionsfähig, wenn alle Teilsysteme funktionieren.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gerät funktionsfähig?
- b) Wie ändert sich die unter a) gesuchte Wahrscheinlichkeit, wenn
 - b₁) angenommen werden darf, dass das erste Teilsystem niemals ausfällt,
 - b₂) dem dritten Teilsystem noch zwei Reservesysteme (mit derselben Ausfallwahrscheinlichkeit 0.6) parallel geschaltet werden?

1.5.6 Bei den Schaltungen a)–d) können die jeweiligen Bauelemente (in der Gesamtheit) unabhängig mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten ausfallen, wobei der Ausfall eines Bauelementes die Unterbrechung des Stromes an der entsprechenden Stelle zur Folge habe.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass jeweils zwischen den Punkten s und t Strom fließen kann!



1.5.7 Bei einer Notstromanlage werden von einem Dieselmotor drei gleichartige Generatoren angetrieben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb einer Woche ein Defekt am Motor bzw. an einem Generator auftritt, sei 0.1 bzw. 0.2. Die einzelnen Aggregate fallen unabhängig voneinander aus.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stromversorgung im betrachteten Zeitraum vollständig ausfällt.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind für den angegebenen Zeitraum wenigstens $\frac{2}{3}$ der maximal möglichen Leistung verfügbar?

1.5.8 Bei einem kontinuierlichen Fertigungsprozess treten nacheinander die Arbeitsgänge Drehen, Fräsen und Schleifen auf. Zur Sicherung eines gleichmäßigen Erzeugnisdurchlaufs werden dabei 3 Drehmaschinen, 2 Fräsmaschinen und eine Schleifmaschine eingesetzt. Die benutzten Maschinen seien voll ausgelastet und fallen innerhalb einer Schicht unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

Maschine	Drehmaschine	Fräsmaschine	Schleifmaschine
Wkt.	0.3	0.2	0.1

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb einer Schicht durch Maschinenausfälle der betrachteten Maschinen der Erzeugnisdurchlauf gestoppt wird.
- b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass innerhalb einer Schicht durch Maschinenausfälle der Erzeugnisdurchlauf verlangsamt wird, ohne dass es zu einem Stopp bei den betrachteten Arbeitsgängen kommt.
- 1.5.9 Die Steuerung eines chemischen Prozesses erfordert für eine bestimmte Zeit T permanente Temperatur- und Druckangaben. Zur Messung dieser Größen werden Sonden eingesetzt, die mit maximal vier voneinander unabhängig arbeitenden Druck- bzw. Temperatursensoren bestückt werden können. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Druck- bzw. Temperatursensors innerhalb der Zeit T betrage 0.3 bzw. 0.1.
Für welche Bestückungsvariante ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die gesamte Zeit T Temperatur- und Druckangaben vorliegen, am größten? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

2 Zufallsgrößen

2.1 Diskrete Zufallsgrößen

2.1.1 Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x) = \begin{cases} (x+1)c & : x = 0, 1, 2, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c .
- b) Ermitteln Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
 $P(X < 2)$, $P(X \leq 2)$ und $P(0 < X < 2)$.
- c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X .
- d) Bestimmen Sie den kleinsten Wert von x , für den
 $P(X \leq x) > 0.5$ gilt.
- 2.1.2 Eine Zufallsgröße X besitze die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.5	0.2	0.1	c

- a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c .
 - b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.
 - c) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion.
- 2.1.3 Drei Baugruppen a_1 , a_2 bzw. a_3 eines Gerätesystems können voneinander unabhängig in einem vorgegebenen Zeitintervall der Länge T mit den Wahrscheinlichkeiten 0.95, 0.8 bzw. 0.1 ausfallen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, den Erwartungswert sowie die Varianz für die Anzahl der ausgefallenen Baugruppen zum betrachteten Zeitintervall.
- 2.1.4 Ein Student habe auf seinen Weg zur Universität fünf voneinander unabhängig geregelte Ampelkreuzungen zu passieren. Es bezeichne X die Anzahl der überquerten Kreuzungen bis zu einem Halt wegen "Rot" oder dem Erreichen der Universität.
- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von X , falls alle Ampeln gleichlange Rot-Grün-Phasen besitzen.
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Universität erreicht, ohne vor einer Ampel halten zu müssen?
- 2.1.5 Bei einer kontinuierlichen Fertigung von Disketten werde jede hundertste Diskette einem Qualitätstest unterzogen. Die Produktion wird unterbrochen, falls dabei eine fehlerhafte Diskette festgestellt wird.
Es bezeichne X die Anzahl der geprüften Disketten bis zum erstmaligen Beobachten eines Fehlers.
- a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit einer vorgegebenen Fehlerrate von $p \cdot 100\%$, $0 \leq p \leq 1$, die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X .
 - b) Wie groß ist bei einer Fehlerrate von 2% die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens nach fünf geprüften Disketten ein Stopp erfolgt?
 - c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Fehlerrate von 1% mehr als 1000 Disketten produziert werden bevor die erste Fehlermeldung erfolgt.
 - d) Berechnen Sie den Erwartungswert von X . Verschaffen Sie sich einen Überblick über die Abhängigkeit von EX bzgl. der Ausschussrate $p \cdot 100\%$.

- 2.1.6 Zwischen dem Hersteller und Abnehmer eines speziellen Schaltkreises werde folgender Prüfplan vereinbart:
Der Abnehmer übernimmt alle 50 gelieferten Schaltkreise, wenn in einer Stichprobe von 10 Schaltkreisen höchstens ein nicht voll funktionsfähiger Schaltkreis enthalten ist. Ansonsten wird die gesamte Lieferung verworfen. Berechnen Sie bei diesem Prüfplan die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 50 Schaltkreise
- abgenommen werden, obwohl diese 12 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten,
 - zurückgewiesen werden, obwohl nur 3 nicht voll funktionsfähige Schaltkreise enthalten sind.
- 2.1.7 Ein spezielles Prüfungssystem zum Abschluss eines Testates im Fach Mathematik sei wie folgt beschaffen:
Der zu prüfende Student wählt aus 50 vorliegenden Prüfungsfragen 10 Fragen aus. Das Testat gelte als bestanden, wenn er von diesen Fragen mindestens 4 Fragen richtig beantworten kann. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testat
- bestanden wird, obwohl der Student nur 20% aller Prüfungsfragen beantworten kann,
 - nicht bestanden wird, obwohl der Student 60% aller Prüfungsfragen beantworten kann.
- 2.1.8 Ein Gerätesystem bestehe aus 6 unabhängig voneinander arbeitenden Teilsystemen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Teilsystems sei für eine vorgegebene Zeit T konstant und betrage $p = 0.3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Zeit T höchstens zwei Teilsysteme ausfallen.
- 2.1.9 In einer Urne befinden sich vier rote und eine schwarze Kugel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim achtmaligen Ziehen mit Zurücklegen mindestens einmal die schwarze Kugel gezogen wird.
- 2.1.10 Aus einem sehr großen Lieferposten von Kondensatoren werden 100 Stück zufällig herausgegriffen und ihre Kapazität gemessen. Ein Kondensator sei unbrauchbar, wenn seine Kapazität nicht in einem vorgegebenen Toleranzintervall liegt. Der durchschnittliche Anteil unbrauchbarer Kondensatoren betrage 3%.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 100 zufällig ausgewählten Kondensatoren genau 3 unbrauchbare sind?
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter diesen 100 Kondensatoren höchstens drei unbrauchbare enthalten sind.

- 2.1.11 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis A bei vier unabhängigen Versuchen mindestens einmal eintritt, sei 0.5904. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Ereignis mindestens zweimal eintritt, wenn das Eintreten von A in jedem Versuch gleichwahrscheinlich ist?
- 2.1.12 Ein Computerpool bestehe aus 25 unabhängig voneinander benutzten Einzelcomputern. Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Rechners innerhalb von 6 Monaten 0.1 beträgt. Im Wartungsvertrag sei folgendes festgelegt:
In der Regel erfolgt alle 6 Monate ein Service. Für den Fall, dass bereits vor dem nächsten Servicetermin 5 oder mehr Geräte ausfallen, werde ein Sofortservice durchgeführt.
- Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl der Computerausfälle innerhalb einer Nutzungszeit von 6 Monaten.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den in a) angegebenen Bedingungen Sofortservice notwendig wird?
 - Es werde kein Sofortservice vereinbart. Wie viel Computer müssten installiert werden, damit mit mindestens 95% iger Sicherheit für die gesamte Zeit bis zum nächsten Service stets wenigstens 20 Computer verfügbar sind?
- 2.1.13 Ein Automat stelle während eines Arbeitszyklus gleichzeitig 10 Teile her, wobei ein Ausschussanteil von 0.1% auftritt.
Wie viele Arbeitszyklen kann der Automat maximal durchlaufen, um mit 90%-iger Sicherheit kein Ausschussteil zu produzieren?
- 2.1.14 Die Anzahl der Beschichtungsfehler einer speziellen Magnetbandsorte betrage pro 1000 m im Mittel 1.6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein 500 m langes Bandstück keinen Fehler aufweist?
Begründen Sie Ihren Lösungsansatz!
- 2.1.15 Auf einer bestimmten Rallye-Strecke von 10 000 km sei pro Pkw im Mittel mit einer Reifenpanne zu rechnen.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Pkw bereits auf den ersten 7 000 km eine Reifenpanne hat.
 - Eine Mannschaft sei mit drei Pkw an der Rallye beteiligt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Pkw ohne Reifenpanne die Rallye überstehen.

2.1.16 In einer Telefonzentrale kommen montags in der Zeit von 8⁰⁰ – 9⁰⁰ Uhr durchschnittlich 60 Anrufe an.

- a) Die Telefonzentrale wurde an einem Tag erst ab 8⁰¹ Uhr besetzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Zeit bereits angerufen wurde.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anrufen mehr als 4 Minuten vergehen?

2.2 Stetige Zufallsgrößen

2.2.1 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 1, \\ cx & : 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & : x > 2. \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten c so, dass $f(x)$ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist.
- b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

2.2.2 Eine Zufallsgröße X besitze die folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0, \\ \frac{x^2}{2} & : 0 < x \leq \sqrt{2}, \\ 1 & : x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion $f(x)$.
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

2.2.3 Die Zeitdauer für die Reparatur einer speziellen Maschine sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert von 4 h.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- a) die Reparaturzeit 2 h nicht übersteigt,
- b) die Reparaturzeit zwischen 2 h und 6 h liegt.
- c) Bestimmen Sie den Median für die Reparaturzeit.

2.2.4 Die Lebensdauer einer Glühlampe sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Es sei bekannt, dass im Durchschnitt 75% der Glühlampen eine Mindestbrenndauer von 500 Stunden erreichen.

Berechnen Sie Erwartungswert und Median der Lebensdauer.

2.2.5 Eine radioaktive Substanz gebe im Verlauf von 7.5s im Mittel 3.87 α -Teilchen ab. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- a) diese Substanz während einer Sekunde mindestens ein α -Teilchen emittiert,
- b) zwischen der Emission zweier Teilchen mindestens zwei Sekunden vergehen,
- c) die Zeit zwischen zwei Emissionen zwischen einer und drei Sekunden liegt.

2.2.6 Die Montagezeit für Schaltelemente sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße X . Bekannt sei, dass im Mittel 5 Schaltelemente je Stunde montiert werden.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Montagezeit für ein Schaltelement einen Wert von 12 Minuten nicht übersteigt.
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb einer Stunde
 - b₁) höchstens 3 Schaltelemente,
 - b₂) 5 oder 6 Schaltelemente montiert werden können.

2.2.7 Berechnen Sie:

- a) $P(|X| < 1.5)$, $P(X > 2)$, $P(X > -1)$ falls $X \sim N(0, 1)$ -verteilt ist,
- b) $P(-2 \leq X < 7)$, $P(-5 \leq X \leq -2)$, $P(X > 0)$ für $X \sim N(1, 9)$,
- c) σ^2 , falls $X \sim N(2, \sigma^2)$ -verteilt ist und $P(0 < X < 4) = 0.68269$ gilt,
- d) μ , falls $X \sim N(\mu, 16)$ -verteilt ist und $P(X < 7) = 0.3265$ gilt.

2.2.8 Die Entfernung eines Objektes werde mit Hilfe eines Längenmessgerätes ermittelt. Dabei sei der gemessene Wert die Realisierung einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma = 40$ m. Es sei bekannt, dass bei der Messung kein systematischer Fehler auftritt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem 2500 m entfernten Objekt bei der Messung ein um 60 m bis 80 m zu großes Messergebnis ermittelt wird.

2.2.9 Der Wert eines Ohmschen Widerstandes sei eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 990 \Omega$ und der Standardabweichung $\sigma = 20 \Omega$.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der tatsächliche Wert eines Widerstandes zwischen 950Ω und 1050Ω liegt.

- b) Durch Änderung der Technologie sei es möglich, den mittleren Widerstand auf $1000\ \Omega$ zu vergrößern. Wie hoch ist dann der Anteil der Widerstände, deren Wert nicht in dem unter a) angegebenen Toleranzintervall liegt?
- c) Für den Einbau in Präzisionsgeräte sind Widerstände im Bereich zwischen $990\ \Omega$ und $1010\ \Omega$ erforderlich. Wie groß darf σ maximal sein, wenn unter Beibehaltung des Erwartungswertes $\mu = 1000\ \Omega$ durchschnittlich 90% der gefertigten Widerstände die Bedingungen für den Einbau erfüllen sollen?

2.2.10 Für die automatische Abfüllung eines Arzneimittels in Flaschen sei ein Abfüllautomat auf eine Abfüllmenge von 150 ml eingestellt. Für Abfüllmengen in diesem Bereich wird vom Hersteller des Automaten angegeben, dass die tatsächliche Abfüllmenge eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 150\ \text{ml}$ und der Varianz $\sigma^2 = 3.5\ \text{ml}^2$ ist. Bei einer Nachkontrolle der Abfüllmenge werden Flaschen ausgesondert, bei denen die Abfüllmenge weniger als 146 ml beträgt.

- a) Wie viel von 4000 Flaschen einer Tagesproduktion werden im Mittel auf diese Weise ausgesondert?
- b) Auf welche neue Abfüllmenge müsste der Automat eingestellt werden, damit durchschnittlich nur 1% der Flaschen ausgesondert wird?

2.2.11 Der Durchmesser gedrehter Wellen sei eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 75\ \text{mm}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0.5\ \text{mm}$. Eine Welle mit einem Durchmesser kleiner als 74 mm ist Ausschuss. Ist der Durchmesser größer als 75.5 mm, dann muss die Welle nachgearbeitet werden.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Welle nach der ersten Bearbeitung Ausschuss ist.
- b) Es werden 150 Wellen produziert. Wie viel Wellen lassen sich im Mittel sofort verwenden?
- c) Welcher mittlere Durchmesser müsste eingestellt werden, damit nicht mehr als 1% der Wellen Ausschuss ist?

2.2.12 Eine Metallhobelmaschine stelle Platten her, deren Dicke als normalverteilte Zufallsgröße angenommen werden kann, mit dem Erwartungswert $\mu = 28\ \text{mm}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0.03\ \text{mm}$.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Dicke einer gefertigten Platte außerhalb des Toleranzbereiches $\mu \pm 0.05\ \text{mm}$ liegt.
- b) Bestimmen Sie die Toleranzgrenzen $\mu \pm c$ so, dass die Dicke mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% einen Wert aus diesem Bereich annimmt.

2.3 Funktionen von Zufallsgrößen

2.3.1 Es seien X_1 , X_2 und X_3 unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen mit

$$X_1 \sim N(100, 4), X_2 \sim N(100, 4) \text{ und } X_3 \sim N(120, 9).$$

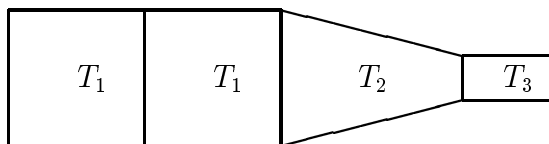
Bestimmen Sie für die Zufallsgrößen

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 \text{ und } Y_2 = 2 \cdot X_1 + X_3$$

- die Erwartungswerte und die Varianzen,
 - die Verteilungen,
 - die Wahrscheinlichkeiten $P(|Y_i - EY_i| \leq 12)$ für $i = 1, 2$.
- 2.3.2 Die Zufallsgröße X sei $N(0, 1)$ -verteilt. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen und die Dichtefunktionen der folgenden Zufallsgrößen:
- $Y_1 = 2X$,
 - $Y_2 = \sigma X + \mu$,
 - $Y_3 = |X|$,
 - $Y_4 = X^2$.
- 2.3.3 Es sei X im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig verteilt. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße Y mit

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X), \quad \lambda > 0 .$$

2.3.4 Zur Montage eines Drosselventils werden drei verschiedene Bauteile T_1 , T_2 , T_3 benötigt. Dabei wird das erste Bauteil T_1 zweimal und die anderen beiden Bauteile T_2 und T_3 je einmal eingebaut (siehe Skizze). Die Längen der Bauteile seien normalverteilte Zufallsgrößen mit $X_1 \sim N(10, 0.002)$, $X_2 \sim N(12, 0.004)$, $X_3 \sim N(8, 0.002)$. Das Drosselventil ist nur passfähig, wenn seine Gesamtlänge zwischen 39.8 cm und 40.25 cm liegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Passfähigkeit des Drosselventils.



2.3.5 Die Rechenzeit eines umfangreichen Statistikprogrammes sei eine normalverteilte Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert $\mu = 75$ min und der Varianz $\sigma^2 = 15$ min².

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- bei einem,
- bei 10 bzw.

- c) bei 100 voneinander unabhängigen Programmläufen die durchschnittliche Rechenzeit um höchstens 5% überschritten wird.

2.3.6 Der bei einer Längenmessung mit einem bestimmten Messgerät auftretende Fehler sei eine normalverteilte Zufallsgröße. Die Messung erfolge ohne systematischen Fehler und die Varianz des Messfehlers betrage 0.64 mm^2 .

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer beliebigen Messung der Fehler betragsmäßig größer als 1 mm wird.
- b) Mit Hilfe von voneinander unabhängigen Wiederholungsmessungen und Mittelbildung lässt sich die Messgenauigkeit erhöhen. Wie viel Wiederholungsmessungen müssen mindestens ausgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% der Mittelwert der Messwerte um höchstens 1 mm vom wahren Wert abweicht?

2.3.7 Eine Ersatzteillieferung enthalte eine Kiste Kugellager, zwei Kisten Zahnräder und drei Kisten Schrauben. Die Masse der Kisten (Bruttogewicht in kg) kann durch unabhängige und normalverteilte Zufallsgrößen $X, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, Z_3$ mit

$$X \sim N(125, 1) \text{ , } Y_i \sim N(84, 4), (i = 1, 2) \text{ , } Z_j \sim N(65, 3), (j = 1, 2, 3)$$

beschrieben werden.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse einer Ersatzteillieferung größer ist als 500 kg.
- b) Wie viel solcher Ersatzteillieferungen darf man maximal auf einen Lastwagen laden, wenn die Gesamtmasse aller Ersatzteillieferungen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% unter 18 Tonnen liegen soll?

2.3.8 Die elektrische Leistung eines Ohmschen Verbrauchers mit dem Widerstand R in einem Gleichstromnetz mit der Netzspannung U berechnet sich zu

$$N = \frac{U^2}{R} \text{ .}$$

Bestimmen Sie die mittlere Leistung, falls die Netzspannung eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert $\mu = 220 \text{ V}$ und der Varianz $\sigma^2 = 100 \text{ V}^2$ ist.

2.3.9 Eine Firma stattet einen Computerpool mit 10 kompletten Arbeitsplätzen aus. Jeder Arbeitsplatz werde mit jeweils einer Zentraleinheit, Tastatur, Bildschirm und Drucker bestückt. Es sei bekannt, dass bei den vorliegenden Einsatzbedingungen die jeweilige mittlere störungsfreie Lebensdauer bei 8 Jahren, 10 Jahren, 8 Jahren und 6 Jahren liegt.

Bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass die jeweilige störungsfreie Lebensdauer der Komponenten einer Exponentialverteilung genügt, die Wahrscheinlichkeit für eine Garantieleistung innerhalb von 6 Monaten

- a) für einen konkreten Arbeitsplatz,
- b) für den gesamten Computerpool.

2.3.10 Die Energieversorgung eines Wettersatelliten erfolge über vier unabhängig voneinander arbeitende Sonnensegel. Es sei bekannt, dass die Lebensdauer der einzelnen Sonnensegel jeweils exponentialverteilt ist. Dabei haben zwei der Sonnensegel eine mittlere Lebensdauer von 130 Monaten und die restlichen beiden von jeweils 85 Monaten.

Der Wettersatellit sei solange vollständig leistungsfähig, wie alle Sonnensegel arbeiten. Die Zeitdauer dafür sei Y_1 .

Der Satellit liefere solange noch verwertbare Datenmengen, wie mindestens noch ein Sonnensegel arbeitet. Die Zeitdauer für diesen Zustand sei Y_2 .

- a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von Y_1 und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wettersatellit mindestens fünf Jahre seine vollständige Leistungsfähigkeit behält.
- b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Wettersatellit bereits nach 10 Jahren keine Daten mehr senden kann.

2.4 Grenzverteilungssätze

2.4.1 Ein spezieller Schaltkreis sei mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.7$ voll funktionsfähig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer gefertigten Serie von 1000 Schaltkreisen

- a) wenigstens 680 Schaltkreise voll funktionsfähig sind,
- b) die Anzahl der voll funktionsfähigen Schaltkreise mindestens 675 aber höchstens 725 Stück beträgt.

2.4.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kondensator während der Zeit T ausfällt, betrage 0.5.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 solchen unabhängig voneinander arbeitenden Kondensatoren mehr als 60 Stück in der Zeit T ausfallen.
- b) Wie viele Kondensatoren muss man mindestens in Reserve haben, damit nach der Zeit T mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% alle ausgefallenen Kondensatoren ersetzt werden können?

- 2.4.3 Beim Gießen spezieller Schaltgehäuse trete ein Ausschussprozentsatz von 10% auf. Für einen reibungslosen Produktionsverlauf müssen je Gießvorgang (wenigstens) 100 brauchbare Gehäuse hergestellt werden. Wie viel Gehäuse müssen mindestens bei einem Vorgang gegossen werden, um mit mindestens 99% iger Sicherheit diese Forderung zu erfüllen?
- 2.4.4 Die Eignung für eine bestimmte Tätigkeit sei erst nach Ablauf einer Probezeit feststellbar. Aus der Erfahrung sei bekannt, dass sich nur 60% der auf Probe eingestellten Mitarbeiter auch für die Tätigkeit als geeignet erweisen. Es werden dringend 50 neue Mitarbeiter benötigt. Wie viele Mitarbeiter wären auf Probe einzustellen, damit mit mindestens 95%iger Sicherheit nach Ablauf der Probezeit wenigstens 50 tatsächlich geeignete Mitarbeiter verfügbar sind?
- 2.4.5 Schaltelemente mit einem Ausschussanteil von 2% werden in Packungen zu je 100 Stück verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung
- keine fehlerhaften Schaltelemente sind,
 - nicht mehr als drei fehlerhafte Schaltelemente sind?
- 2.4.6 Bei der Produktion bestimmter Teile werde auf zwei Taktstraßen T_1 und T_2 gearbeitet, die in einer Zeiteinheit gleich viele Teile fertigen. Die Taktstraße T_1 werde bei einer Ausschussrate von 4.5% zweischichtig und die Taktstraße T_2 werde bei einer Ausschussrate von 2% dreischichtig ausgelastet.
- Berechnen Sie den Ausschussanteil einer Tagesproduktion.
 - Die produzierten Teile werden zu je 100 Stück verpackt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde eine Packung mit mehr als drei defekten Teilen erhält.
- 2.4.7 Für PC-Lüfter werden Kugellager einer bestimmten Sorte mit verminderten Laufgeräuschen benötigt. Zur Qualitätskontrolle werden einem Lieferposten 100 Kugellagern entnommen und auf Laufruhe überprüft. Der Lieferposten werde als qualitätsgerecht angenommen, wenn dabei höchstens fünf Lager nicht die geforderte Laufruhe aufweisen.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Lieferposten nicht angenommen wird, wenn tatsächlich 2% aller produzierten Lager keine ausreichende Laufruhe aufweisen?
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Lieferposten angenommen wird, obwohl 11% aller produzierten Lager nicht die Anforderung an die Laufruhe erfüllen.

2.4.8 Eine 'ideale' Münze werde n -mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- a) bei 100 Würfeln die relative Häufigkeit für das Ereignis 'Zahl' um weniger als 0.1 Einheiten von der Wahrscheinlichkeit 0.5 abweicht.
- b) Wie oft müsste man die 'ideale' Münze mindestens werfen, um mit mindestens 99%-iger Sicherheit eine Abweichung der relativen Häufigkeit von der Wahrscheinlichkeit zu erreichen, die kleiner ist als 0.1 Einheiten.
- c) Lösen Sie die Aufgaben a) und b) mit Hilfe der Tschebyscheff Ungleichung und vergleichen Sie die Ergebnisse.

3 Grundlagen der mathematischen Statistik

3.1 Statistische Schätzverfahren

3.1.1 In einer Telefonzentrale wurden für 11 aufeinanderfolgende Anrufe die Zeitabstände zwischen zwei Anrufen ermittelt. Es ergaben sich die folgenden Werte:

38.1 , 74.1 , 17.7 , 17.7 , 1.2 , 13.2 , 22.8 , 35.7 , 108.6 , 20.7 .

Geben Sie auf der Grundlage dieser Stichprobenwerte je eine Schätzung für den mittleren Zeitabstand und die mittlere quadratische Abweichung der Zeitabstände vom Erwartungswert an.

Diskutieren Sie die Eigenschaften dieser Schätzfunktionen.

3.1.2 Bestimmen Sie nach der Momentenmethode und nach der Maximum-Likelihood-Methode eine Schätzfunktion für den Parameter einer Poissonverteilung und diskutieren Sie deren Eigenschaften.

3.1.3 Um die Zerreißfestigkeit von Formteilen zu überprüfen, wurde bei 30 zufällig ausgewählten Formteilen die Zerreißfestigkeit ermittelt. Es ergaben sich die folgenden Werte:

Zerreißfestigkeit (in MPa)	Anzahl der Formteile
10.7	1
10.8	3
10.9	5
11.0	12
11.1	6
11.2	1
11.3	2

- a) Geben Sie eine Schätzung für den Mittelwert und die Varianz der Zerreißfestigkeit an.
- b) Geben Sie für die mittlere Zerreißfestigkeit ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ an.
- c) Diskutieren Sie die zur Lösung der Aufgaben a) bzw. b) erforderlichen Verteilungsvoraussetzungen.

3.1.4 Aus einer Lieferung von Kondensatoren wurden zehn Stück zufällig ausgewählt und folgende Kapazitäten (in μF) festgestellt (Normwert: $220 \mu\text{F}$):

218 , 221 , 220 , 221 , 219 , 221 , 220 , 218 , 222 , 219 .

- a) Berechnen Sie je eine Schätzung für den Erwartungswert und für die Varianz der Kapazität.
- b) Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Stichprobenergebnisse je ein Konfidenzintervall für den Mittelwert und die Varianz der Kapazität zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$. Von welchen Verteilungsvoraussetzungen gehen Sie dabei aus?

3.1.5 Bei einer Arbeitsstudie wurden folgende Werte für die Zeitdauer der Justierung eines Gerätes gemessen:

Minuten	3	4	5	6	8	9
Häufigkeiten	2	4	7	12	4	1

- a) Geben Sie erwartungstreue Schätzungen für den Erwartungswert und die Varianz der Zeitdauer an.
- b) Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.9$ für den Erwartungswert der Zeitdauer.
- c) Ermitteln Sie eine obere Grenze für die Standardabweichung der Zeitdauer, so dass mit 95%-iger Sicherheit der wahre Wert von σ überdeckt wird.
- d) Geben Sie die notwendigen Voraussetzungen an.

3.1.6 Einer Krankenversicherung seien für eine spezielle Gruppe von 15 Versicherungsnehmern mittlere Kosten in Höhe von $\bar{x}_n = 5\,500 \text{ DM}$ bei einer Stichprobenstandardabweichung $s_n = 1\,500 \text{ DM}$ entstanden.

- a) Geben Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittleren Kosten zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ an.
- b) Die Versicherung habe ihren Tarif unter der Annahme kalkuliert, dass die mittleren Kosten $5\,000 \text{ DM}$ betragen. Diskutieren Sie anhand des erhaltenen Konfidenzintervalls, ob eine Neukalkulation des Tarifs angezeigt erscheint.

3.1.7 Zur Schätzung des Ausschussanteiles eines umfangreichen Lieferpostens werde diesem eine Stichprobe von 200 Teilen entnommen. Dabei wurden 190 einwandfreie Teile festgestellt.

- a) Geben Sie eine Schätzung für den Ausschussanteil an.
- b) Wie groß kann maximal die Varianz der Schätzung sein?
- c) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für den Ausschussanteil zum Konfidenzniveau 0.95 und interpretieren Sie das Ergebnis.

3.1.8 Beim Wurf einer Reißzwecke kommt diese entweder in Seitenlage oder in Kopf-lage zur Ruhe. Es sei A das Ereignis, dass die Reißzwecke in die Kopf-lage fällt.

- a) Führen Sie 100 Versuche durch und geben Sie auf der Basis der Versuchsergebnisse eine Schätzung für $P(A)$ an.
- b) Geben Sie eine Schätzung für die Varianz der Schätzfunktion an. Wie groß kann maximal die Varianz der Schätzfunktion werden?
- c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von a) ein zweiseitiges Konfidenzintervall für $P(A)$ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$.

3.2 Statistische Prüfverfahren

3.2.1 Um den Kohlenstoffanteil eines Stahls zu überprüfen, wurden 49 Proben analysiert. Daraus ergaben sich das arithmetische Mittel $\bar{x} = 1.7\%$ und die Stichprobenstandardabweichung $s = \sqrt{0.5\%}$.

Überprüfen Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$, ob die Abweichungen des Kohlenstoffgehalts von den gewünschten 2% signifikant sind. Nehmen Sie dazu an, dass der Kohlenstoffanteil eine normalverteilte Zufallsgröße ist.

3.2.2 Bei einem Verbrauchertest für Waschmittel werde auch die Abfüllmenge kontrolliert. Dabei ergaben sich bei 10 zufällig ausgewählten 5 kg Packungen einer bestimmten Sorte folgende Abfüllmengen (in kg):

4.6 , 4.95 , 4.8 , 4.9 , 4.75 , 5.05 , 4.9 , 5.1 , 4.8 , 4.95 .

- a) Bestimmen Sie Schätzungen für den Erwartungswert und die Varianz der Abfüllmenge.
- b) Ist auf der Basis dieser Beobachtungswerte die Auffassung vertretbar, dass die Packungen im Mittel weniger Waschmittel als angegeben enthalten?

3.2.3 Zur Überprüfung des mittleren Stromverstärkungsfaktors eines speziellen Transistortyps werde dieser Faktor bei 15 Transistoren dieses Typs gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:

95 , 90 , 98 , 94 , 104 , 90 , 84 , 110 , 100 , 100 , 98 , 93 , 87 , 85 , 97 .

- Geben Sie für den Erwartungswert und die Varianz des Stromverstärkungsfaktors je einen Schätzwert an.
- Muss man aufgrund dieser Ergebnisse bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ darauf schließen, dass der mittlere Stromverstärkungsfaktor signifikant von dem gewünschten Wert 100 abweicht?
- Welche Verteilungsannahmen sind zur Lösung in a) bzw. b) erforderlich?

3.2.4 Die Genauigkeit eines Messgerätes verschlechtere sich im Laufe der Zeit infolge von Abnutzungerscheinungen. Das Messgerät gelte als brauchbar, solange die Varianz σ^2 des Messfehlers einen Wert von 10^{-4} nicht überschreitet.

Darf man bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ auf die Brauchbarkeit des Messgerätes schließen, wenn aus 25 Kontrollwerten für die Varianz eine Schätzung $s^2 = 0.65 \cdot 10^{-4}$ ermittelt wurde?

3.2.5 Ein Temperaturmessgerät gelte als unbrauchbar, wenn für die Varianz des Messfehlers $\sigma^2 > 0.4 \text{ K}^2$ gilt.

Aus $n = 15$ Kontrollmessungen erhielt man $\bar{x} = 0.012 \text{ K}$ und $s^2 = 0.6 \text{ K}^2$. Kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ auf die Unbrauchbarkeit des Messgerätes schließen?

3.2.6 Beim Messen der Entfernung zwischen zwei Punkten sei der Messwert die Realisierung einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsgröße. Aus 20 Messungen einer bestimmten Entfernung ergaben sich die folgenden Schätzwerte:

$$\bar{x} = 327.3 \text{ m} \quad , \quad s^2 = 17.3 \text{ m}^2 .$$

- Bestimmen Sie ein 99%-iges Konfidenzintervall für den Erwartungswert.
- Geben Sie ein einseitiges nach oben beschränktes Konfidenzintervall für σ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ an.
- Lässt sich bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% die Aussage $\mu > 320 \text{ m}$ rechtfertigen?
- Darf man bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ auf die Brauchbarkeit des Messgerätes schließen, wenn als Kriterium für die Tauglichkeit die Forderung $\sigma < 5.0 \text{ m}$ dient?

- 3.2.7 Ein Erzeugnis werde in zwei Betrieben mit unterschiedlicher Beschäftigtenstruktur hergestellt. Im ersten Betrieb mit vorwiegend männlichen Beschäftigten ergibt eine Stichprobe von 100 Erzeugnissen 10 defekte Teile. Dagegen wurde in einem, die gleichen Erzeugnisse fertigenden Betrieb mit vorwiegend weiblichen Beschäftigten bei einer Stichprobe von 80 Erzeugnissen nur 5 defekte Teile registriert. Lässt sich daraus schließen, dass weibliche Beschäftigte im vorliegenden Fall geeigneter sind als männliche Beschäftigte?
- 3.2.8 Bei der Prüfung eines Lieferpostens von Disketten wurden 80 Disketten kontrolliert. Dabei erwiesen sich 2 Disketten als fehlerhaft. Prüfen Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass der Ausschussanteil höchstens 4% beträgt.
- 3.2.9 In einer Erhebung wurde die Anzahl der Fahrzeuge registriert, die innerhalb einer Minute einen bestimmten Straßenabschnitt passierten. Die Erhebung wurde Werktags in der Zeit zwischen 9⁰⁰ und 10⁰⁰ Uhr durchgeführt. Dabei ergaben sich die folgende Werte:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$H_n(k)$	15	45	51	44	23	12	6	3	-	1

Es sei X die Anzahl der Fahrzeuge, die unter den vorgegebenen Bedingungen innerhalb einer Minute einen bestimmten Straßenabschnitt passieren. Überprüfen Sie bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$, ob die Stichprobe aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit stammt.

- 3.2.10 Zur Senkung der Betriebskosten in einem Krankenhaus soll überprüft werden, ob ein preiswertes Beruhigungs- und Schlafmittel A ein bereits etabliertes, aber teureres Beruhigungs- und Schlafmittel B ersetzen kann. Es kann davon ausgegangen werden, dass die gesamten Nebenwirkungen vergleichbar sind.
- In einem klinischen Versuch wurde dazu die Schlafdauer nach Einnahme der Medikamente A bzw. B bei jeweils 20 vergleichbaren Patienten überprüft. Daraus ergaben sich die folgenden Ergebnisse:

$$\bar{x}_A = 6.8 \text{ h} , \bar{x}_B = 7.1 \text{ h} , s_A = 1.2 \text{ h} , s_B = 1.1 \text{ h} .$$

- Überprüfen Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$, ob man auf unterschiedliche Schlafdauer der Patienten schließen muss.
- Was bedeutet für das Krankenhaus das in a) erhaltene Ergebnis?

4 Wiederholungsaufgaben

- Ein Gütekontrolleur entnehme einem Los von 60 Teilen, von denen 5 Ausschuss sind, nacheinander ohne Zurücklegen genau 12 Teile. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen 12 Teilen mindestens ein Ausschussteil befindet? (0.686)
- Auf einem Glücksrad seien die Zahlen 1-8.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim dreimaligen Drehen mindestens einmal die Zahl 4 erscheint. (0.33)
- Die Funktionsfähigkeit einer Anlage sei gestört, wenn beide Eingangsteile E_1 und E_2 oder alle drei Zwischenteile Z_1, Z_2 und Z_3 oder wenn das Ausgangsteil A ausfällt. Die Teile fallen voneinander unabhängig mit folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

Teil	E_i	Z_j	A
Wkt.	0.1	0.2	0.05

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Funktionsfähigkeit der Anlage. (0.933)

- Eine Anlage falle aus, wenn die beiden Elemente A_1 und A_2 und gleichzeitig mindestens eines der Elemente A_3, A_4 oder A_5 ausfallen. Die einzelnen Elemente können dabei voneinander unabhängig in der Zeit t mit folgenden Wahrscheinlichkeiten ausfallen:

Element	A_1	A_2	A_3, A_4, A_5
Wkt.	0.5	0.2	0.1

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anlage in der Zeit t ausfällt. (0.0271)
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Inspektion nach Ablauf der Zeit t mindestens ein defektes Element gefunden wird, und dabei die Anlage noch funktionsfähig ist? (0.6813)
- Eine Wohnung bestehe aus den Räumen A, B und C . Raum A wird von einer Deckenleuchte mit drei 40-Watt-Glühlampen, Raum B von einer Stehlampe mit zwei 60-Watt-Glühlampen und Raum C von einer Leuchtstoffröhre beleuchtet. Es sei bekannt, dass in einem bestimmten Zeitraum die Glühlampen bzw. die Leuchtstoffröhre voneinander unabhängig mit folgenden Wahrscheinlichkeiten ausfallen:

Lampenart	40-Watt	60-Watt	Leuchtstoffröhre
Wkt.	0.2	0.15	0.1

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Zeitraum alle Räume beleuchtet sind.
Anmerkung: Ein Raum gelte als beleuchtet, wenn darin wenigstens eine Glühlampe bzw. Leuchtstoffröhre funktionsfähig ist. (0.873)
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im betrachteten Zeitraum keinerlei Ausfall von Glühlampen bzw. der Leuchtstoffröhre gibt? (0.333)
6. Die Funktionsfähigkeit eines Kühlsystems sei gewährleistet, wenn sowohl die Kühlblöcke A_1 und A_2 als auch mindestens einer der Kühlblöcke B_1 oder B_2 einwandfrei arbeiten. Jeder Block kann mit je zwei parallel betriebenen Kühlelementen bestückt werden. Zur Verfügung stehen vier Kühlelemente hoher Qualität und vier Kühlelemente geringerer Qualität, die in der Zeit T voneinander unabhängig mit den Wahrscheinlichkeiten 0.1 bzw. 0.2 ausfallen.
- a) Wie sind die 8 Kühlelemente auf die einzelnen Blöcke des Kühlsystems zu verteilen, damit die Zuverlässigkeit (Wahrscheinlichkeit für die ausfallfreie Arbeit in der Zeit t) maximal wird?
- b) Berechnen Sie die Zuverlässigkeit des Kühlsystems. (0.9785)
7. Zur Bewertung einer Aufnahmeprüfung für ein spezielles Studienfach wurden alle in diesem Fach immatrikulierten Studenten dieser Prüfung unterzogen. Von den 40% der Studenten, die das Studienziel nicht erreichten hatten 90% ein negatives Testergebnis. Von jenen, die das Ziel erreichten, hatten 1% ein negatives Testergebnis.
 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Student mit negativem Testergebnis das Studienziel erreichte. (0.016)
8. In einem Betrieb werde ein bestimmtes Erzeugnis in vier Abteilungen hergestellt. Die Produktionsmengen und die Ausschussquoten sind in der folgenden Tabelle dargestellt:
- | - | Abt. 1 | Abt. 2 | Abt. 3 | Abt. 4 |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|
| Produktionsanteil | 50% | 25% | 20% | 5% |
| Ausschussquote | 2% | 3% | 4% | 5% |
- a) Wie groß ist der Ausschussanteil an der Gesamtproduktion? (0.028)
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein reklamiertes Ausschussteil aus den Abteilungen zwei oder drei? (0.554)
9. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem medizinischen Test bei Vorliegen einer bestimmten Krankheit auch einen Hinweis auf diese Krankheit zu erkennen (Sensitivität des Testes), betrage 0.95. Die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Test eine nicht infizierte Person als solche zu erkennen (Spezifität des

Testes), betrage 0.98. Aus einer Bevölkerungsgruppe mit einem bekannten Anteil von 0.1% infizierter Personen (Prävalenz) werde eine zufällig ausgewählte Person getestet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem positiven Testergebnis die untersuchte Person auch tatsächlich infiziert ist (positiver prädikativer Wert). (0.016)

10. Gegeben sei die Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0, \\ kx & : 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & : x > 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a) die Konstante k , so dass $f(x)$ die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße ist,

b) die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$,

c) den Erwartungswert EX (1.33).

11. Es sei bekannt, dass bei Ultraschallprüfungen durchschnittlich in 2 von 3 Versuchen ein vorhandener Einschluss erkannt wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei wenigstens 50% der Prüfungen ein vorhandener Einschluss erkannt wird, wenn:

a) insgesamt 3 Prüfungen bzw. (0.741)

b) insgesamt 45 Prüfungen durchgeführt wurden. (0.986)

12. Eine Maschine enthalte insgesamt N Federelemente. Zu vorgeschriebenen Durchsichtsterminen wird die Maschine für die Zeit T stillgelegt, und ein Mechaniker erneuert die schadhaften Federn. Für das Auswechseln jeder Feder benötigt er die feste Zeit T_0 . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Feder bei der Durchsicht erneuert werden muss, betrage 0.2.

Wie groß ist in den folgenden konkreten Aufgabenstellungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zeit T ausreicht, um alle notwendigen Federwechsel auszuführen?

a) $N = 4$, $T_0 = 20$ min, $T = 35$ min. (0.819)

b) $N = 100$, $T_0 = 5$ min, $T = 120$ min. (0.871)

13. Ein Buch enthalte auf 10 Seiten im Mittel 2 Druckfehler.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten 15 aufeinanderfolgende Seiten mindestens 3 Druckfehler? (0.577)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei diesem Buch der erste Druckfehler zwischen der 10. Seite und der 15. Seite auftritt? (0.0855)

14. Die Inspektionszeit für einen speziellen Pkw sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Die mittlere Inspektionszeit pro Pkw betrage 4 Stunden.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Inspektionszeit für einen Pkw zwischen zwei und acht Stunden liegt? (0.471)
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Tag (8 Stunden) mindestens 3 Pkw inspiziert werden. (0.323)
15. Es sei bekannt, dass bei einem Webautomaten im Mittel auf 6 Meter Stoffbahn ein Webfehler auftritt.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ballen von 18 Meter Länge mehr als einen Webfehler enthält. (0.801)
 - Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich bei einem beliebigen Ballen der erste Webfehler zwischen dem 6. und 9. Meter befindet. (0.1447)
 - Diskutieren Sie die zur Lösung notwendigen Voraussetzungen.
16. Das Schleifmaß eines Wellenzapfens sei unter Berücksichtigung zufälliger Beobachtungsfehler eine normalverteilte Zufallsgröße. Die Varianz σ^2 betrage $100 (\mu\text{m})^2$. Ein Zapfen mit einem Durchmesser kleiner als 19.98 mm ist Ausschuss. Ist der Durchmesser größer als 20.015 mm, so muss der Zapfen nachgearbeitet werden.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Zapfen sofort verwendet werden kann, wenn der Automat auf den mittleren Wert von 20.0 mm eingestellt ist. (0.91044)
 - Auf welchen Wert μ müsste der Automat eingestellt werden, damit höchstens 1.5% der Wellen Ausschuss ist? ($\mu = 20.0017 \text{ mm}$)
17. Bei der automatischen Abfüllung von Bier in Flaschen sei die Abfüllmenge eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert $\mu = 500 \text{ cm}^3$ und der Standardabweichung $\sigma = 2 \text{ cm}^3$.
- Wie groß ist in einem Kasten mit 20 Flaschen die durchschnittliche Anzahl der Flaschen, die weniger als 497 cm^3 Bier enthalten? (Im Mittel 1.34)
 - Unter der Annahme, dass das Leervolumen einer Flasche 504 cm^3 beträgt, berechne man, auf welchen Wert μ der Abfüllautomat eingestellt werden muss, damit die Flaschen beim Abfüllen höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.01 überlaufen. ($\mu = 499.34 \text{ cm}^3$)

18. Zur Überprüfung des mittleren Stromverstärkungsfaktors eines speziellen Transistortyps wurde dieser Faktor bei 25 Transistoren dieses Typs gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:

95 , 90 , 98 , 94 , 104 , 90 , 84 , 110 , 100 , 100 , 118 , 98 , 103 ,
112 , 109 , 98 , 102 , 110 , 115 , 85 , 104 , 101 , 91 , 100 , 101 .

Unter der Voraussetzung, dass diese Werte Realisierungen einer normalverteilten Zufallsgröße sind, ermittle man sowohl für den Erwartungswert μ als auch für die Standardabweichung σ je ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$.

$(I_\mu = (96.86, 104.10)$ und $I_\sigma = (0, 11.58)$)

19. Bei der Untersuchung der Zerreißfestigkeit einer Garnsorte wurden zehn unabhängige Messungen vorgenommen. Aus diesen Messergebnissen wurden die folgenden Schätzwerte ermittelt:

$$\bar{x} = 10.1 \text{ N} \quad , \quad s^2 = 0.077 \text{ N}^2 .$$

- a) Geben Sie ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ und eine obere Konfidenzgrenze für die Standardabweichung σ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ an.

$$(I_\mu = (9.902, 10.299) \text{ N und } I_\sigma = (0, 0.456) \text{ N})$$

- b) Welche Voraussetzungen bezüglich der Verteilung haben Sie zur Lösung der Aufgabe verwendet?

20. Der Einsatz eines neuen Düngemittels ergab im Rahmen eines umfangreichen Versuchs die folgenden Hektarerträge (in Tonnen):

31 , 40 , 43 , 42 , 29 , 38 , 28 , 49 , 36 , 50 , 37 , 24 , 45 , 35 , 38 .

- a) Geben Sie je eine erwartungstreue und konsistente Schätzfunktion für den Mittelwert und für die Varianz an, und berechnen Sie diese Schätzwerte. ($s = 7.55 \text{ t}$)

- b) Bestimmen Sie je ein 95%-iges Konfidenzintervall für den Mittelwert und für die Varianz der Grundgesamtheit.

$$(I_\mu = (33.49, 41.85) \text{ t und } I_{\sigma^2} = (0, 121.4) \text{ t}^2)$$

- c) Kann man im Rahmen dieser erhaltenen Messergebnisse bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ annehmen, dass es zu einer Verbesserung des Ertrages gekommen ist, wenn bisher im Mittel 34 Tonnen je Hektar geerntet wurden. (ja!)

- d) Welche Voraussetzungen mussten Sie zur Lösung der Aufgaben a) bis c) treffen.

21. Ein Geflügelhändler beziehe von einer Geflügelfarm Truthühner mit einem vereinbarten mittleren Gewicht von 6 kg. Eine Lieferung von 60 Hühnern ergab einen Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 5.63$ kg und eine Stichprobenstandardabweichung $s = 2.5$ kg.
Überprüfen Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%, ob der Verdacht des Händlers berechtigt ist, dass die Truthühner ein zu geringes Gewicht besitzen. (nein!)
22. Ein Autotyp brauche unter vorgegebenen Rahmenbedingungen laut Hersteller 8 l Benzin auf 100 km. Der Verbrauch werde als normalverteilt angenommen. Ein Test von 40 dieser Autos ergab unter vorgegebenen Bedingungen einen mittleren Verbrauch von 8.3 l auf 100 km und eine Standardabweichung von 0.6 l auf 100 km .
Lässt sich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% die Behauptung des Herstellers aufrecht erhalten? (nein!)
23. Bei der Überprüfung eines Abfüllautomaten für 0.5-Literflaschen ergaben sich folgende Werte für die tatsächlich abgefüllte Menge (Angaben in cm^3):
- 499.5 , 501.8 , 501.0 , 502.5 , 501.0 ,
504.1 , 497.9 , 503.3 , 498.7 , 500.2 .
- a) Geben Sie je eine erwartungstreue und konsistente Schätzfunktion für den Mittelwert und für die Varianz der Abfüllmenge an. Berechnen Sie diese Schätzwerte. ($s^2 = 3.95 \text{ cm}^6$)
- b) Lässt sich bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% auf einen signifikanten Unterschied zum Sollwert von 500 cm^3 schließen? (nein!)
- c) Welche Verteilungsannahmen sind zu den Lösungen zu a) bzw. b) erforderlich?
24. Infolge von Abnutzungserscheinungen werde ein Messgerät im Laufe der Zeit unbrauchbar. Ein Messgerät gelte als unbrauchbar, wenn für die Varianz seines $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten zufälligen Messfehlers gilt: $\sigma^2 > 10^{-2}$.
Aus einer konkreten Stichprobe von 20 Werten ergab sich der Schätzwert $s^2 = 0,0146$.
Darf man bei einer zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ auf die Unbrauchbarkeit des Messgerätes schließen? (nein!)