

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Skript zur Vorlesung

FUNKTIONENTHEORIE

Prof. Stollmann

WS 2001/2002

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Die komplexe Zahlenebene	5
2.1	Arithmetik	5
2.2	Konvergenz	8
2.3	Potenzreihen und analytische Funktionen	12
3	Holomorphe Funktionen	17
3.1	Komplexe Differenzierbarkeit	17
3.2	Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen, Logarithmus	19
3.3	Reelle vs komplexe Diffbarkeit: die CAUCHY-Riemannsches Diffgl.	21
4	Der CHAUCHYsche Integralsatz	23
4.1	Komplexe Kurvenintegrale und Integraldarstellung holomorpher Fkt.	23
4.2	Sätze von Morera und Goursat	28
4.3	Nullstellen holomorpher Fkt. und der Fundamentalsatz der Algebra	31
4.4	Der CHAUCHYsche Integralsatz	34
4.5	Der Index von Wegen, CHAUCHY's Integralformel	39
5	Isolierte Singularitäten	41
5.1	Klassifikation isolierter Singularitäten	41
5.2	Laurentreihen	42
5.3	Residuen	44

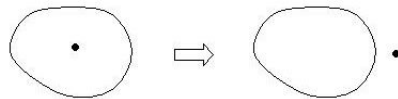
1 Einleitung

Wir haben folgende Probleme:

Problem 1: Was ist $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$? (Analysis)

Problem 2: Haben alle Polynome Nullstellen? (Algebra)

Problem 3: Kann man den Strick in der Ebene „auf eine Seite“ bringen, ohne zu schneiden?



Diese Probleme haben gemeinsam, dass sie mit Methoden der Funktionentheorie gelöst werden können. Die Funktionentheorie ist die „Analysis im Komplexen“ und beschäftigt sich mit differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; Differenzierbarkeit wird wie in der Analysis 1 dadurch definiert, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert.

Es stellt sich jedoch heraus, dass diese Forderung sehr viel einschneidender ist, als die entsprechende Forderung für reelle Funktionen.

So ist jede im obigen Sinn (für alle $z_0 \in \mathbb{C}$) differenzierbare Funktion automatisch unendlich oft differenzierbar, Real- und Imaginärteil sind harmonische Funktionen, die Funktionswerte in einer Scheibe sind auf dem Rand eindeutig bestimmt.

Holomorphe Funktionen (so nennt man komplex differenzierbare Funktionen im obigen Sinn) sind winkeltreu (fast immer) und zwei holomorphe Funktionen, die auf einer „kleinen Teilmenge“ von \mathbb{C} übereinstimmen, müssen schon gleich sein.

All dies wird in der Vorlesung angesprochen. Es gibt viele ausgezeichnete Bücher über Funktionentheorie (Complex Variables),

z.B. J.B. Conway: Functions of One Complex Variable. Springer Graduate Texts in Mathematics, New York, 1973

W. Fischer: Funktionentheorie

K. Fänisch: Funktionentheorie

G. Schmieder: Grundkurs Funktionentheorie

R. Remmert: Funktionentheorie

Die Funktionentheorie ist eine besonders elegante und schöne Theorie mit zahlreichen Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik.

2 Die komplexe Zahlenebene

2.1 Arithmetik

Hier lernen wir die komplexen Zahlen und ihre algebraischen Strukturen kennen: Addition, Multiplikation, i , Betrag, Polarzerlegung. Eigentlich ist $\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, mit den Operationen

Addition $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ gegeben durch
 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

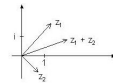
Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + y_2x_1)$

Mit diesen Verknüpfungen wird $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper; dabei ist $0 = (0, 0)$ das neutrale Element der Addition, $1 = (1, 0)$ das der Multiplikation und die üblichen Regeln (Assoziativgesetz, Distributivgesetz) gelten für die Verknüpfungen. Mit Hilfe von $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$ können wir

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &= \{x \cdot 1 + yi : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &=: \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \text{ schreiben;}\end{aligned}$$

es ist $i^2 = -1$ (checken!).

Von nun an werden wir die Paarschreibweise nicht mehr verwenden. Die Addition kann man leicht geometrisch deuten, vektoriell



Eine geometrische Deutung des Produkts ist leichter in der Polardarstellung zu sehen.

2.1 Beispiel. $\frac{1}{z_1 + iz_2} = ?$ falls $z \neq 0$

$$\frac{1 \cdot (z_1 - iz_2)}{(z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)} = \frac{z_1 - iz_2}{z_1^2 + z_2^2}$$

Wir können $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $x \mapsto x \cdot 1$ als Teilkörper von \mathbb{C} auffassen!

Für $z = x + iy$ sagen wir

$$\begin{aligned}x &=: \operatorname{Re} z && \mathbf{Realteil} \\ y &=: \operatorname{Im} z && \mathbf{Imaginärteil, beide reell!!}\end{aligned}$$

Die Spiegelung an der **reellen Achse** $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ heißt **komplexe Konjugation**, d.h. für $z = x + iy$ ist das **komplex Konjugierte** $\bar{z} = x - iy$.

Wir sehen sofort, dass

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2 \operatorname{Re} z &\Leftrightarrow \operatorname{Re} z &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ z - \bar{z} &= 2i \operatorname{Im} z &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

Was ist $z \cdot \bar{z}$?

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 =: |z|^2,$$

wobei $|z|$ der euklidische Abstand von 0 zum Punkt z in der Gaußschen Zahlenebene ist.

Rechenregeln:

$$(1) \frac{1}{|z|} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

$$(2) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

$$(3) |\bar{z}| = |z|.$$

2.2 Beispiel. (1) Real- und Imaginärteile von $\frac{1}{z}$, $\frac{z-a}{z+a}$ ($a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$)

(2) Was ist i^n ?

(3) Cayley-Transformation.

Was ist $\left| \frac{t-i}{t+1} \right|$ für $t \in \mathbb{R}$?

Was passiert für $\frac{z-i}{z+i}$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$?

Regeln für das Rechnen mit Beträgen

$$(1) |z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}z\bar{w} + |w|^2$$

$$(2) |z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}z\bar{w} + |w|^2$$

(3) Parallelogrammgleichung

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

(4) Dreiecksungleichung

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad |z| = r(\cos \varphi, \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Abkürzung: $\operatorname{cis} \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Polarzerlegung



Klar: $r = |z|$; φ ist bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.

Wir schreiben trotzdem

$$\varphi = \arg z, \text{ wobei } \arg \text{ keine Funktion ist.}$$

$$z_1 = r_1 \cdot \text{cis } \varphi_1, z_2 = r_2 \cdot \text{cis } \varphi_2,$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Beträge werden multipliziert, Argumente werden addiert.

Additionstheoreme



$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\text{„arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{arg } z_1 + \text{arg } z_2\text{“}$$

Quiz: Welche Funktionen bilden Produkte in Summen ab?

Wir bekommen als Spezialfall die Formeln von **de Moivre**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Komplexe Wurzeln

Gesucht ist, für $z = r \cdot \text{cis } \varphi$, $n \in \mathbb{N}$, eine Zahl w mit

$$w^n = z.$$

Nach der Formel oben können wir

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \text{cis } \frac{1}{n}\varphi \text{ wählen.}$$

Aber es gibt noch andere:

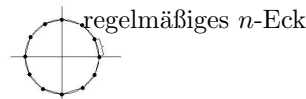
$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \text{cis } \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

insgesamt n verschiedene!

Spezialfall: n -te Einheitswurzeln, d.h. $z = 1$

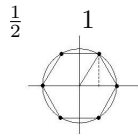
$$\text{cis } \frac{1}{n}(2\pi k), \quad 0 \leq k \leq n-1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{1}{n}2\pi$$



2.3 Beispiel. $n = 6$, Einheitswurzeln $1, \text{cis } \frac{\pi}{3}, \text{cis } \frac{2\pi}{3}, \text{cis } \frac{3\pi}{3}, \text{cis } \frac{4\pi}{3}, \text{cis } \frac{5\pi}{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$



$$1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Übungsbeispiel: Was sind die Wurzeln von i ?

2.2 Konvergenz

Wir untersuchen nun die metrische Struktur von \mathbb{C} .

2.4 Definition. Sei M Menge, $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ eine Abbildung mit

$$(M1) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad (x, y \in M)$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y, \quad (x, y \text{ in } M)$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad (x, y, z \in M)$$

Dann heißt (M, d) ein **metrischer Raum**.

Im letzten Abschnitt haben wir diese Eigenschaften gesehen für $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$, $d(z, w) = |z - w|$ euklidischer Abstand.

Mit Hilfe der Metrik können Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit definiert werden.

2.5 Definition (Konvergenz). Sei (M, d) ein metrischer Raum, $(x_n) \subset M$ Folge, $x \in M$. Wir sagen (x_n) **konvergiert gegen** x , in Zeichen $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon : \quad d(x, x_n) \leq \varepsilon.$$

Wenn wir die metrischen Kugeln

$$B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\} \subset M$$

in M einführen, können wir die Konvergenz auch so formulieren:

$$x_n \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \begin{cases} \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ so dass alle} \\ x_n \text{ mit } n \geq n_\varepsilon \text{ in der } \varepsilon\text{-Kugel um } x \text{ liegen.} \end{cases}$$

Oft findet man auch die Bezeichnung

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\} \quad \varepsilon\text{-Umgebung}$$

In \mathbb{R} wird üblicherweise die Metrik $d(x, y) = |x - y|$ verwendet; 2-Kugeln werden dann Intervalle

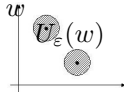
$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) &= [x - \varepsilon, x + \varepsilon], \\ U_\varepsilon(x) &= (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \end{aligned}$$

In \mathbb{C} haben wir das richtige Bild

$B_\varepsilon(z)$

Bei B_ε ist der Rand dabei,
bei U_ε nicht.

In manchen Büchern auch $D_r(x)$ wie diskret.



Wir gehen natürlich davon aus, dass Vertrautheit im Umgang mit reellen Folgen(-Funktionen) besteht. In diesem Sinn ist es nützlich, Konvergenz komplexer Folgen auf die der Real- und Imaginärteile zurückzuführen.

2.6 Lemma. Sei (z_n) Folge in \mathbb{C} . Dann

$$z_n \rightarrow z \text{ für } n \rightarrow \infty \iff \begin{array}{l} \text{Re } z_n \rightarrow \text{Re } z \\ \text{und} \\ \text{Im } z_n \rightarrow \text{Im } z \end{array}$$

Beweis. „ \Rightarrow “ $|z - z_n| \leq |x - x_n|$ und $|z - z_n| \leq |y - y_n|$, wobei $x = \text{Re } z$, $x_n = \text{Re } z_n$, $y = \text{Im } z$, $y_n = \text{Im } z_n$.

Ist also $\varepsilon > 0$ und n_ε so, dass $|z - z_n| \leq \varepsilon$ für $n \leq n_\varepsilon$, so folgt auch $|x - x_n| \leq \varepsilon$ und $|y - y_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$; damit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$.

„ \Leftarrow “ Sei $\varepsilon > 0$; da $x_n \rightarrow x$ gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ für } n \geq n_1 \quad (\star)$$

Da $y_n \rightarrow y$ gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ für } n \geq n_2 \quad (\star\star)$$

Für $n \geq \max\{n_1, n_2\} =: n_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} |z - z_n|^2 &= |x - x_n|^2 + |y - y_n|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

□

Eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen ist die **Vollständigkeit**, die axiomatisch verankert ist. Sie überträgt sich auf die komplexen Zahlen.

Hier die nötigen Begriffe:

2.7 Definition (CAUCHY-Folge). Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in M heißt **CAUCHY-Folge**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε existiert mit:

$$\forall n, m \geq N_\varepsilon : d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

2.8 Lemma. Sei (z_n) Folge in \mathbb{C} . Dann

$$(z_n) \text{ ist CAUCHY-Folge} \iff \begin{cases} (\operatorname{Re} z_n) \text{ ist CAUCHY-Folge in } \mathbb{R} \\ \text{und} \\ (\operatorname{Im} z_n) \text{ ist CAUCHY-Folge in } \mathbb{R} \end{cases}$$

Beweis. Übung, analog zum letzten Lemma. \square

2.9 Definition (vollständiger Raum). Ein metrischer Raum (M, d) heißt **vollständig**, wenn jede CAUCHY-Folge (x_n) in M konvergiert.

2.10 Lemma. \mathbb{C} ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis.

$$\begin{aligned} (z_n) \text{ CAUCHY-Folge in } \mathbb{C} &\stackrel{\text{Lemma}}{\implies} \begin{cases} (\operatorname{Re} z_n) \text{ ist CAUCHY-Folge in } \mathbb{R} \\ \text{und} \\ (\operatorname{Im} z_n) \text{ ist CAUCHY-Folge in } \mathbb{R} \end{cases} \\ \mathbb{R} \text{ vollst.} &\implies \begin{cases} (\operatorname{Re} z_n) \text{ konvergent} \\ \text{und} \\ (\operatorname{Im} z_n) \text{ konvergent} \end{cases} \\ \text{Lemma} &\implies (z_n) \text{ konvergent} \end{aligned} \quad \square$$

Schließlich zur Stetigkeit.

2.11 Definition (Stetigkeit). Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ metrische Räume, $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine Abbildung.

- (a) Ist $x_0 \in M_1$, so heißt f **stetig in** x_0 , falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.
- (b) Ist $U_1 \subset M_1$ so heißt f **stetig auf** (in) U_1 , falls f in allen Punkten $x_0 \in U_1$ stetig ist.
- (c) f heißt **stetig**, wenn es stetig auf M_1 ist.

Hier können wir zumindest einen Spezialfall auf Stetigkeit reeller Funktionen zurückführen.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion; dann werden durch $u(x) := \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$ zwei reelle Funktionen $u =: \operatorname{Re} f$, $v =: \operatorname{Im} f$ definiert. Man sieht leicht (Übung):

$$f \text{ stetig (in } x_0) \iff \begin{cases} u \text{ stetig (in } x_0) \\ \text{und} \\ v \text{ stetig (in } x_0) \end{cases}$$

Hier könnte man z.B. eins der obigen Lemmata zusammen mit der Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen verwenden (eventuell Übung).

2.12 Beispiel. (1) $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$, $z \mapsto |z|$ ist stetig,

(2) $- : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist stetig.

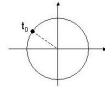
(3) $\frac{1}{z} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist stetig
bei 0 nicht definiert und nicht stetig fortsetzbar.

Wie im Reellen beweist man, dass Summe und Produkt stetiger Funktionen stetig sind.

Übungsaufgabe: Sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (mit der Metrik, die von \mathbb{C} kommt). Für jedes $t_0 \in \mathbb{T}$ gibt es stetige Funktionen

Was ist der Zusammenhang mit der stetigen Funktion $\Phi : \mathbb{T} \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(z) = \arg z$

Aber keine solche Funktion läßt sich stetig auf ganz \mathbb{T} fortsetzen.
 $\text{cis} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$, $x \mapsto \text{cis}(x)$?



2.3 Potenzreihen und analytische Funktionen

Bis jetzt kennen wir im wesentlichen Polynomfunktionen $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ als stetige Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} . Eine Potenzreihe „ist, wenn man $n = \infty$ zuläßt“.

Genauer: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, eine **Potenzreihe mit Entwicklungspunkt** z_0 und Koeffizienten c_n ist eine „Reihe“ der Form

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n.$$

Wir erinnern daran, dass eine **Reihe**

$$\sum_{n \geq 0} a_n$$

die Folge $(s_k)_{k \geq 0}$ der **Partialsommen**

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

bezeichnet; hierbei ist $a_n \in \mathbb{C}$ und

$$s_N = a_0 + \dots + a_N \in \mathbb{C}.$$

Dann ist klar, dass $\sum_{n \geq 0} a_n$ **konvergiert**, wenn $s_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} s$ für ein $s \in \mathbb{C}$, d.h. wenn es ein $s \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - s \right| \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Damit haben wir für Potenzreihen zwei Blickpunkte

(1) Ist (c_n) Folge in \mathbb{C} , so betrachten wir für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} \underbrace{c_n (z - z_0)^n}_{a_n} \text{ in } \mathbb{C},$$

d.h. die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n \right)_{N \in \mathbb{N}_0}$$

(2) Etwas abstrakter: für (c_n) in \mathbb{C} betrachten wir die Reihe der Funktionen

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n,$$

d.h. die Folge der Funktionen der Partialsummen

$$\left(z \mapsto \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n \right)_{N \in \mathbb{N}} \text{ Funktionenfolge.}$$

Zunächst nehmen wir den ersten Standpunkt ein; für eine gegebene Koeffizientenfolge (c_n) und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, erhalten wir für jedes $z \in \mathbb{C}$ eine Reihe

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n.$$

Diese Reihe kann konvergieren, muss aber nicht.

2.13 Satz (Konvergenzradius). Sei (c_n) Folge in \mathbb{C} . Dann gibt es $R \in [0, \infty]$ so, dass

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n.$$

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$ divergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n.$$

R heißt **Konvergenzradius**.

Beweis. O.E. sei $z_0 = 0$. Wir zeigen zunächst

(iii) Konvergiert $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert $\sum_{n \geq 0} c_n w^n$ für alle $w \in U_{|z|}(0)$.

Ist nämlich $w \in U_{|z|}(0)$, so ist $\frac{|w|}{|z|} =: q < 1$. Da $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ konvergiert, ist $c_n z^n$ eine Nullfolge und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |c_n w^n| &= \sum_{n=0}^N |c_n \cdot z^n| \cdot \left(\frac{|w|}{|z|}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^N \underbrace{|c_n \cdot z^n|}_{\rightarrow 0} \cdot q^n \text{ beschränkt in } N \text{ mit } q^n \text{ geometrische Folge.} \end{aligned}$$

Damit ist (iii) gezeigt.

Setze

$$R := \sup\{|z| : \sum_{n \geq 0} c_n z^n \text{ konvergiert}\}.$$

Dafür ist sicher (ii) aus dem Satz erfüllt.

Sei nun $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < R$. Nach Definition von R gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|w| < |z| < R$ für das $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ konvergiert. Aus (iii) folgt, dass $\sum_{n \geq 0} c_n w^n$ konvergiert. Da $|w| < R$ beliebig war, ist (i) bewiesen. \square

Wir werden gleich sehen, dass wir eigentlich viel mehr bewiesen haben. Zunächst

2.14 Beispiel. (1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ (Konvergenzradius ?)

(2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ (Konvergenzradius ?)

(3) $\sum_{n \geq 0} n z^n$ (Konvergenzradius ?)

Wer kann eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 0 bzw. ∞ nennen?

Durch Vergleich mit der geometrischen Reihe erhält man folgende Formel:

2.15 Lemma. Sei (c_n) in \mathbb{C} , $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist der Konvergenzradius von $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ gegeben durch

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Beweis. Übung \square

Eine der wichtigsten Reihen ist die **Exponentialreihe**

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n;$$

sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und ihre Summe wird mit

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

bezeichnet.

(Konvergenz: $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ für $n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n!} z^n \leq \left(\frac{2z}{\sqrt{n}}\right)^n < 1$ falls n groß genug.)

Wir wollen nun Potenzreihen als Funktionenreihen (-folgen) betrachten.

2.16 Definition. Sei X eine Menge, $f_n : X \rightarrow M$ Funktionen, M ein metrischer Raum. Die Folge (f_n) heißt **punktweise konvergent auf** $Y \subset X$, falls für alle $y \in Y$ die Folge $(f_n(y))$ **konvergiert**.

Sei (f_n) punktweise konvergenz und $f(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$ der Grenzwert. Wir sagen, dass (f_n) **auf** Y **gleichmäßig** konvergiert, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall y \in Y : d(f_n(y), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Wir können diese Konvergenz auch mit Hilfe einer Metrik beschreiben. Sei Y eine Menge, (M, d) ein metrischer Raum.

$$B(Y, M) := \{f : Y \rightarrow M : f(Y) \text{ beschränkt}\}$$

Für $f, g \in B(Y, M)$ sei

$$d_\infty(f, g) := \sup_{y \in Y} d(f(y), g(y)).$$

Ist (f_n) eine Folge in $B(Y, M)$, so ist (f_n) offenbar gleichmäßig konvergent auf Y genau dann, wenn (f_n) im metrischen Raum $(B(Y, M), d_\infty)$ konvergiert.

Ist Y selbst ein metrischer Raum und (f_n) eine Folge **stetiger Funktionen**, die **gleichmäßig** gegen f konvergiert, so ist f stetig (Einfach aber wichtig).

2.17 Proposition. Sei $(c_n) \subset \mathbb{C}$. Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ sei positiv. Dann ist

$$f(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n.$$

für alle $z \in U_R(z_0)$ definiert. Für alle $r < R$ konvergiert

$$f_N(z) := \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n$$

gleichmäßig gegen f für $z \in B_r(z_0)$. Insbesondere ist f stetig auf $U_r(z_0)$.

Beweis. O.E. sei $z_0 = 0$. Aus dem Satz über den Konvergenzradius wissen wir, dass

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n \text{ für alle } z \in U_R(z_0) \text{ existiert.}$$

Sei nun $r < R$. Dann gibt es $w \in U_R(z_0)$ mit $\frac{r}{|w|} =: q < 1$. Wir wollen die Reihenreste $(f - f_N)(z)$ gleichmäßig für $z \in B_r(0)$ abschätzen. Sei dazu

$$M := \sum_n c_n |w^n| < \infty.$$

Da $\sum q^n$ konvergiert, gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ so, dass

$$M \left| \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} q^n \right| \leq \varepsilon.$$

Stetigkeit: Sei $w_0 \in U_R(z_0)$. Dann gibt es $r < R$ mit $w_0 \in U_r(z_0)$. Da $f_N \rightarrow f$ gleichmäßig auf $B_r(z_0)$, ist f in w_0 stetig (als gleichmäßiger Limes der stetigen Funktionen f_N). \square

Als Anwendung erhalten wir, dass die Exponentialreihe eine stetige Funktion, die Exponentialfunktion, darstellt.

Bemerkung. Durch Koeffizientenvergleich und die Formeln für i^n erhalten wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{cis} \varphi &\stackrel{!}{=} e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\varphi^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \varphi^{2k}}_{=\cos \varphi} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\sin \varphi} \end{aligned}$$

3 Holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt lernen wir die Funktionen kennen, deren Studium das Thema der Vorlesung ist.

3.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Sei $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

3.1 Definition. Sei $z_0 \in U$; wir nennen f **an der Stelle z_0 (komplex) differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. $f'(z_0)$ heißt **Ableitung** von f .

Ist f für alle $z_0 \in U$ differenzierbar, so heißt f **holomorph**; die Algebra (!) der holomorphen Funktionen auf U wird mit $\mathfrak{H}(U)$ bezeichnet. $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$ heißt Ableitung von f .

3.2 Beispiel. (1) Ist $n \in \mathbb{N}_0$, $f(z) = z^n$, so ist f holomorph (auf \mathbb{C}) und

$$f'(z) = n \cdot z^{n-1}.$$

(2) Später beweisen: $\exp' = \exp$.

(3) $f(z) = \bar{z}$ ist nicht differenzierbar.

Zunächst einige Regeln, um Ableitungen von „zusammengesetzten“ Funktionen zu bestimmen:

3.3 Lemma. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$.

(1) Ist f differenzierbar an der Stelle z_0 , so ist f stetig bei z_0 .

(2) Sind f, g differenzierbar bei z_0 , so ist auch $f + g$ differenzierbar bei z_0 und

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

(3) Sind f, g differenzierbar bei z_0 , so ist auch $f \cdot g$ differenzierbar bei z_0 und

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

Kettenregel: Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(U) \subset V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

Beweis. Nur unter der Voraussetzung, dass für $z_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $f(z) \neq f(z_0)$ für $0 < |z - z_0| < r$.

Ist das so, so können wir schreiben

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

□

3.4 Definition. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **analytisch**, wenn für jedes $z_0 \in U$ eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} c_n(z - z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius existiert so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \text{ für } |z - z_0| < r.$$

Wir werden später zeigen, dass jede Funktion, die holomorph aus U ist, auch analytisch auf U ist. Nun die einfache umgekehrte Schlussfolgerung:

3.5 Proposition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f holomorph auf U und $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist analytisch. Insbesondere ist f ∞ -oft differenzierbar und

$$f^{(n)}(z_0) = n! \cdot a_n.$$

Beweis. Sei $z_0 \in U$, $r > 0$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \text{ für } |z - z_0| < r$$

Übung:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(z - z_0)^n \text{ existiert für } |z - z_0| < r$$

Weiter:

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^N c_n(z - z_0)^n}_{f_N(z)} \text{ gleichmäßig in } |z - z_0| < \frac{r}{2}$$

$$f'_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n \text{ konvergiert gleichmäßig in } |z - z_0| < \frac{r}{2}$$

O.E. $z_0 = 0, \dots$

□

Wir wollen nun aus dem entsprechenden reellen Resultat folgern, dass Funktionen mit Ableitung Null konstant (lokal) sein müssen.

Wir erinnern daran, dass eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ **zusammenhängend** ist, wenn sie sich **nicht** in zwei disjunkte nichtleere offene Mengen $G_1 \cap G_2 = G$ zerlegen läßt.

In der Funktionentheorie werden offene zusammenhängende Mengen oft als **Gebiet** bezeichnet.

3.6 Proposition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{N}(G)$ und $f' = 0$. Dann ist f konstant.

3.2 Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen, Logarithmus

Wir kommen nun zur Exponentialfunktion. \exp ist differenzierbar und $\exp' = \exp$ nach der Proposition über die Potenzreihen.

Daraus können wir die Funktionalgleichung der e -Funktion folgern, ohne Reihen multiplizieren zu müssen:

3.7 Korollar. $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}$ fest; setze $g(z) = e^z \cdot e^{a-z}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(z) &= 0 \Rightarrow g \text{ konstant} \Rightarrow g = g(0) = e^a \\ \Rightarrow e^a &= e^{-b} \cdot e^{a+b} \text{ für alle } b \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Speziell $a = 0 \Rightarrow e^b, e^{-b} \neq 0 \dots$ □

Weil alle Koeffizienten in der Exponentialreihe reell sind, ist $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ für $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

Wie in \mathbb{R} definieren wir

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \Rightarrow \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}$$

$$\text{Damit } e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\Rightarrow \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

und

$$e^{i\theta} = \operatorname{cis} \theta \text{ für } \theta \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

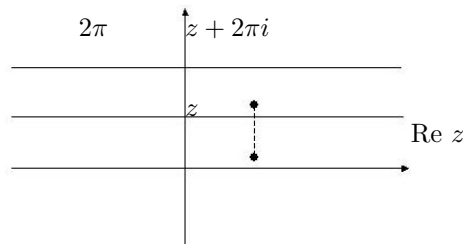
$$z = |z| \cdot e^{i\theta} \text{ mit } \theta = \arg z$$

Wegen Periodizität der trigonometrischen Funktionen ist

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \cdot \exp(2\pi i) = \exp z.$$

Damit ist die e -Funktion **periodisch** mit Periode $2\pi i$ (Keine weiteren Perioden!)

Im z



Wir wollen nun den **Logarithmus** als inverse (Umkehrfunktion) der Exponentialfunktion definieren. Da \exp nicht injektiv ist, ist Vorsicht geboten.

Wir wollen für w den Logarithmus $\log w$ so definieren, dass

$$e^{\log w} = w,$$

so muss $w \neq 0$ (da $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$). Es gilt

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\log |w| + i \arg w + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$$

(Nachrechnen!), wobei $\log |w|$ der reelle Logarithmus.

3.8 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $z = \exp(h(z))$ für $z \in G$. Dann heißt h ein **Zweig des Logarithmus**.

Ist (h, G) ein Zweig des Logarithmus, so muss offenbar $0 \notin G$ sein. Sind (h, G) und (\tilde{h}, \tilde{G}) beides Zweige des Logarithmus, so muss es $k \in \mathbb{Z}$ geben mit $\tilde{h} = h + 2\pi i k$.

3.9 Proposition. Sei $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $h(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, wobei $\theta \in (-\pi, \pi)$ eindeutig bestimmt. Dann ist h ein Zweig des Logarithmus; er heißt **Hauptzweig des Logarithmus**.

Beweis. Stetigkeit siehe Übungsaufgabe von Blatt 1. □

Nun zur Holomorphie des Logarithmus.

3.10 Proposition. Seien U, V offen in \mathbb{C} . Seien $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $f(U) \subset V$ und $g \circ f = \text{id}$. Ist g differenzierbar in $f(z_0)$ und $g'(f(z_0)) \neq 0$, so ist f differenzierbar in z_0 und

$$f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}.$$

Beweis. Sei $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z_0 + h \in U \stackrel{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} f(z_0 + h) \neq f(z_0)$ und

$$\frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{h} = \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Sei nun $h_n \rightarrow 0$, $h_n \neq 0$ mit $h_n + z_0 \in U$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann folgt $f(z_0 + h_n) \rightarrow f(z_0)$ (da f stetig) und

$$\frac{f(z_0 + h_n) - f(z_0)}{h_n} = \dots \rightarrow \frac{1}{g'(f(z_0))},$$

da $g'(f(z_0)) \neq 0$ □

3.11 Korollar. Jeder Zweig g des Logarithmus ist holomorph mit $g'(z) = \frac{1}{z}$.

Beweis. Einsetzen in Proposition. □

3.3 Reelle vs komplexe Differenzierbarkeit: die CAUCHY-Riemanschen Differentialgleichungen

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ können wir auch als Funktion zweier reeller Variablen auffassen:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit $u(x, y) = \text{Re } f(x + iy)$, $v(x, y) = \text{Im } f(x + iy)$.

Aus der Analysis kennen wir den Begriff der Differenzierbarkeit für solche Funktionen. Wir untersuchen zunächst die partiellen Ableitungen; sei f komplex differenzierbar bei z_0 , (h_n) Nullfolge, h_n reell

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f(x_0 + h_n + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h_n} &= \frac{u(x_0 + h_n, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_n} \\ &+ i \left[\frac{v(x_0 + h_n, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_n} \right] \rightarrow f'(z_0) \end{aligned}$$

Aus der Konvergenz folgt nun:

$u(\cdot, \cdot)$ ist nach x partiell differenzierbar bei (x_0, y_0)

$v(\cdot, \cdot)$ ist nach x partiell differenzierbar bei (x_0, y_0)

$\partial_x u(x_0, y_0) = \text{Re } f'(z_0)$

$\partial_x v(x_0, y_0) = \text{Im } f'(z_0)$

Nun:

$$\frac{f(z_0 + ih_n) - f(z_0)}{ih_n} \rightarrow f'(z_0).$$

Das liefert

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_0, y_0 + h_n) - u(x_0, y_0)}{ih_n} + i \frac{v(x_0, y_0 + h_n) - v(x_0, y_0)}{ih_n} \\ &= \frac{v(x_0, y_0 + h_n) - v(x_0, y_0)}{h_n} - i \cdot \frac{u(x_0, y_0 + h_n) - u(x_0, y_0)}{h_n} \rightarrow f'(z_0), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \partial_y v(x_0, y_0) &= \operatorname{Re} f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -\operatorname{Im} f'(z_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) \end{aligned}$$

3.12 Lemma. *Ist $f = u + iv$ (wie oben) bei z_0 komplex differenzierbar, so existieren die partiellen Ableitungen $\partial_x u, \dots$ bei z_0 und erfüllen die CAUCHY-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0), \\ \partial_x v(x_0, y_0) &= -\partial_y u(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ total differenzierbar und erfüllen die Ableitungen die CAUCHY-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist f komplex differenzierbar.

Beweis. 1. Teil schon nachgerechnet.

Umgekehrt sei $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar in x_0, y_0

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} f(z_0 + h) - f(z) = Df(z_0) \cdot h + \varphi(h) \text{ mit } \frac{|\varphi(h)|}{|h|} \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } h \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} Df(x_0, y_0) &= \text{Jacobi-Matrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_0 & -v_0 \\ v_0 & u_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung...

$$\begin{aligned} h &= h_1 + ih_2 \Rightarrow Df(x_0, y_0)h = (u_0 + iv_0)(h_1 + ih_2) \\ \Rightarrow \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z)}{h} - (u_0 + iv_0) \right| &= \left| \frac{\varphi(h)}{h} \right| \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Nun noch ohne Beweis etwas mehr zu den CAUCHY-Riemannschen Differentialgleichungen.

Erf\u00fcllen u, v die CAUCHY-Riemannschen Differentialgleichungen, so sind u, v harmonisch, d.h.

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad (\text{Einsetzen})$$

Insgesamt: f holomorph, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f \Rightarrow u, v$ harmonisch.

Ist umgekehrt G ein „sch\u00f6nes“ Gebiet, z.B. $G =$ obere Halbebene, so gibt es zu jeder harmonischen Funktion u eine harmonische Funktion v (eindeutig bis auf add. Konstanten) mit: $u + iv$ ist holomorph. So ein v hei\u00dft harmonisch konjugierte Funktion.

4 Der CHAUCHYSche Integralsatz

In diesem Kapitel beweisen wir die Integraldarstellung holomorpher Funktionen. Die Konsequenzen sind vor allem im Vergleich zur „reellen Welt“ sehr beeindruckend.

4.1 Komplexe Kurvenintegrale und Integraldarstellung holomorpher Funktionen

Hier startet unser Projekt mit der Definition Riemann-integrierbarer Funktionen $g : I \rightarrow \mathbb{C}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Wir nennen g **Riemann-integrierbar**, wenn $\operatorname{Re} g$, $\operatorname{Im} g$ **Riemann-integrierbar** sind und setzen

$$\int_a^b g(x) dx := \int_a^b (\operatorname{Re} g)(x) dx + i \int_a^b (\operatorname{Im} g)(x) dx$$

Natürlich folgen die üblichen Regeln für das Manipulieren von Integralen; stetige Funktionen $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ sind Riemann-integrierbar, und wie im „Reellen“ können wir von uneigentlichen Riemann-Integralen sprechen.

Nun kommen wir zu **Kurvenintegralen**.

Wir nennen eine Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, **Kurve in \mathbb{C}** , $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, γ stetig. Meistens werden wir uns mit stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ beschäftigen, also mit solchen, für die es $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ gibt mit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma|_{(t_k, t_{k+1})} \text{ ist stetig differenzierbar,} \\ \lim_{t \searrow t_k} \gamma'(t) \text{ existiert,} \\ \lim_{t \nearrow t_{k+1}} \gamma'(t) \text{ existiert.} \end{array} \right.$$

Wir nennen $\gamma^* := \gamma([a, b])$ die **Spur** bzw. das Bild der Kurve. Ist $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so können wir das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

definieren. Zwei Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{C}$ heißen **äquivalent**, $\gamma \approx \tilde{\gamma}$, wenn es ein $\varphi : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ bijektiv, stetig differenzierbar gibt mit $\tilde{\gamma} \circ \varphi = \gamma$.

4.1 Proposition. (a) Durch $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : [a, b] \subset \mathbb{R}, \gamma \text{ stückweise stetig differenzierbar}\}$ definiert. Es gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz, \quad \text{falls } \gamma \approx \tilde{\gamma}.$$

(b) Definiere, für $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, die Kurve $-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $-\gamma(t) = \gamma(b-t+a)$. Dann ist

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

(c) Für $c \in \mathbb{C}$ ist

$$\int_{\gamma+c} f(z-c) dz = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

wobei $\gamma+c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $(\gamma+c)(t) = \gamma(t) + c$.

(d) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge $F \in \mathcal{H}(U)$ und $F' = f$ stetig. Für jedes γ mit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Beweis. Übung. □

4.2 Beispiel. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(z) = e^{it}$; sei $|a| < 1$ und $f(z) = \frac{1}{z-a}$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = 1.$$

Beweis. (i) Zu zeigen ist

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - a} dt.$$

Zu zeigen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it} - a} dt = 1.$$

Klar für $a = 0$.

(ii) Definiere

$$G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it} - s \cdot a} dt.$$

Wir wissen: $G(0) = 2\pi$. Zu zeigen $G = \text{const}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} G(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{(e^{it} - s \cdot a)^2} a dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ia \gamma'(t)}{(\gamma(t) - s \cdot a)^2} dt = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{d}{dt} \frac{1}{(\gamma(t) - s \cdot a)} dt = 0 \end{aligned}$$

□

Notation: $\partial B_r(z_0)$.

4.3 Proposition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $B_r(z_0) \subset U$. Sei $f \in \mathcal{H}(U)$, f' stetig und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Dann gilt für alle $z \in U_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$ und $r = 1$. Sei also $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

Wir wollen zeigen, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it} dt - f(z) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right\} ds &= 0 \end{aligned}$$

Setze

$$g(s, t) := \frac{e^{is} f(z + t(e^{is} - z))}{e^{is} - z} - f(z) \text{ für } 0 \leq t \leq 1.$$

(Bemerke, dass $z + t(e^{is} - z) \in [z, e^{is}] \subset B_1(0)$.) wir haben

$$\begin{aligned} g(s, 1) &= \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \\ g(s, 0) &= \frac{e^{is} f(z)}{e^{is} - z} - f(z) \end{aligned}$$

Setze

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^{2\pi} g(s, t) ds \\ G(0) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} f(z) ds - 2\pi f(z) \\ &= f(z) \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds - 2\pi \right]}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Wenn wir noch $G'(t) = 0$ für $0 \leq t \leq 1$ zeigen können, folgt

$$G(1) = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z} - f(z),$$

die Behauptung. Also

$$\begin{aligned} G'(t) &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} g(s, t) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} f'(z + t(e^{is} - z)) \cdot (e^{is} - z) ds \\ &= \int_0^{2\pi} e^{is} f'(z + t(e^{is} - z)) ds \end{aligned}$$

Stammfunktion $F(s) = \frac{1}{it} f(z + t(e^{is} - z))$ liefert

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{1}{it} f'(z + t(e^{is} - z)) \cdot t \cdot i \cdot e^{is},$$

also

$$G'(t) = \int_0^{2\pi} e^{is} f'(z + t(e^{is} - z)) ds = F(2\pi) - F(0) = 0.$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass stetig differenzierbare $f \in \mathcal{H}(U)$ schon analytisch sind.
Idee

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{ire^{it}}{re^{it} - z} dt$$

$\frac{ire^{it}}{re^{it}-z}$ in Potenzreihe $\sum b_n(t)z^n$ entwickeln:

$$\sum_n z^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e^{it})b_n(t)dt.$$

Dazu müssen wir \int und \sum vertauschen. Das wird mit dem folgenden Lemma gerechtfertigt.

4.4 Lemma. Sei γ eine stückweise stetige Kurve in \mathbb{C} , $F_n, F : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $F_n \rightarrow F$ gleichmäßig auf $\gamma^* \Rightarrow \int_\gamma F_n \rightarrow \int_\gamma F$.

Beweis. langweilig. □

4.5 Satz. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(U)$ mit f' stetig. Dann ist f analytisch. Genauer: ist $z_0 \in U$, $U_R(z_0) \subset U$, so besitzt die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

den Konvergenzradius R ; dabei ist $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$ mit $0 < r < R$.

Beweis. Sei z_0 wie im Satz. $z \in U_R(z_0)$, $0 < |z - z_0| < r < R$ und γ der Kreisweg. Wir wissen

$$f(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Wegen $|z - z_0| < r$ und $\xi \in \gamma^*$ ist

$$\frac{|f(\xi)||z - z_0|^n}{| \xi - z_0 |^{n+1}} \leq \frac{M}{r} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \text{ mit } M = \sum_{\xi \in \gamma^*} |f(\xi)|.$$

Da $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$, konvergiert

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \text{ gleichmäßig auf } \gamma^* \\ & \sum_{n \geq 0} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z} \\ \implies f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n \geq 0} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{\text{Lemma}}{=} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \int_{\gamma} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\
 = & \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}_{a_n} \\
 \implies & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \text{ unabh\u00e4ngig von } r.
 \end{aligned}$$

□

4.6 Korollar. Sei $f \in \mathcal{H}(U)$ mit f' stetig, dann ist f unendlich oft differenzierbar.

4.7 Korollar. Sei $f \in \mathcal{H}(U)$, f' stetig, $z_0 \in U$ und $B_r(z_0) \subset U$. Dann gilt

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

4.2 S\u00e4tze von Morera und Goursat

In diesem Abschnitt wollen wir die l\u00e4stige Voraussetzung f' stetig loswerden. Zun\u00e4chst eine triviale aber praktische Beobachtung.

Bemerkung. Sei $f \in C(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, f besitze eine Stammfunktion F (d.h. F mit $F' = f$). Dann ist f analytisch in U .

Ein Dreiecksweg α ist ein Weg

$$\alpha : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}.$$

z_0



Offenbar ist

$$\alpha^* = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0]$$

4.8 Satz (Morera). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$ f\u00fcr jeden Dreiecksweg Δ , so ist f analytisch.

Beweis. Nach der vorangehenden Bemerkung gen\u00fcgt es, eine Stammfunktion F von f zu finden. „Analytisch“ ist eine lokale Eigenschaft.

$z + h$

z

z_0



$z_0 \in U, U_r(z_0) \subset U$. Setze

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt \end{aligned}$$

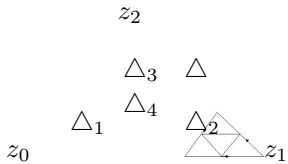
$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[z_0, z+h]} f(\xi) d\xi - \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{[z, z+h]} f(\xi) d\xi = h \cdot \int_0^1 f(z + t \cdot h) dt \end{aligned}$$

$$f \text{ stetig} \xrightarrow{\implies} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \longrightarrow \int_0^1 f(z) dt = f(z),$$

also $F' = f$. □

4.9 Satz (Goursat). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(U)$. Dann ist f analytisch.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f' stetig ist. O.E. $U = U_r(0)$. Wollen Morera anwenden. Sei $[z_0, z_1, z_2] =: \Delta^{(0)} \subset U$.



Durch Seitenhalbierende definieren wir 4 kleinere Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

$$\begin{aligned} \implies \oint_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi &= \sum_{i=1}^4 \oint_{\partial\Delta_i} f(\xi) d\xi \\ \implies \left| \int_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi \right| &\leq 4 \cdot \left| \int_{D_1} f(\xi) d\xi \right| \end{aligned}$$

wobei $D_1 \in \{\partial\Delta_1, \dots, \partial\Delta_4\}$ mit $\max. |\cdot|$ wählt. Zugehöriges Dreieck: $\Delta^{(1)}$.
 Induktiv liefert das: $\Delta =: \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$ mit

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(i)}} f(\xi) d\xi \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(i+1)}} f(\xi) d\xi \right|$$

Es folgt:

$$(1) \left| \int_{\partial\Delta} f(\xi) d\xi \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(\xi) d\xi \right|$$

$$(2) l(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot \underbrace{l(\partial\Delta)}_{\text{Bogenlänge}} = |z_0 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_2 - z_0|$$

$$(3) \text{diam}(\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot \underbrace{\text{diam}(\Delta)}_{\text{Durchmesser}} = \max\{|z_0 - z_1|, |z_1 - z_2|, |z_2 - z_0|\}$$

Weil $\Delta^{(n)}$ abgeschlossen und beschränkt (kompakt) ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta^{(n)} \neq \emptyset \text{ und } \stackrel{(3)}{\implies} \exists z_0 \in \mathbb{C} : \bigcap_n \Delta^{(n)} = \{z_0\}$$

Sei $\varepsilon > 0$; da f differenzierbar in z_0 , existiert $\delta > 0$ mit $B_\delta(z_0) \subset U$ und

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \text{ für } 0 < |z - z_0| < \delta,$$

das heißt

$$(4) \quad |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \text{ für } |z - z_0| < \delta,$$

Sei n so groß, dass $\text{diam} \Delta^{(n)} < \delta$. Da $z_0 \in \Delta^{(n)}$ muß $\Delta^{(n)} \subset B(z_0, \delta)$.

Da 1 und z Stammfunktionen besitzen, ist

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} dz = 0 = \int_{\partial\Delta^{(n)}} z dz$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq |\partial\Delta^{(n)}| \cdot \max_{z \in \partial\Delta^{(n)}} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \\ &\stackrel{(2),(4)}{\leq} l(\partial\Delta) 2^{-n} \cdot \varepsilon |z - z_0| \\ &\leq 2^{-n} \cdot \varepsilon \cdot 2^{-n} \cdot l(\partial\Delta) \cdot \text{diam}(\partial\Delta) \end{aligned}$$

Mit (1):

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot 4^{-n} \cdot c_\Delta \cdot \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist l.s. = 0

□

4.10 Korollar. Sei $f \in \mathcal{H}(U)$, $z_0 \in U$ und $R > 0$ so, dass $U_R(z_0) \subset U$. Dann läßt sich f um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln, deren Konvergenzradius mindestens R ist.

Folgt aus Goursat und dem Satz, dass C^1 -Funktionen analytisch sind, letzter Abschnitt.

4.11 Korollar. Sei $f \in \mathcal{H}(U)$, $z_0 \in U$ und $R > 0$ so, dass $U_R(z_0) \subset U$. Sei γ ein geschlossener Weg in $U_R(z_0)$. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis. Aus vorherigem Korollar:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ mit Konvergenz-Radius } R.$$

Definiere

$$F(z) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\frac{a_{n-1}}{n}}_{b_n} (z - z_0)^n.$$

Da $|b_n| \leq |a_n|$

$$\implies \text{Konvergenzradius von } F \text{ ist } \geq R.$$

$$\stackrel{\text{Früher}}{\implies} F' = f \text{ in } U_R(z_0)$$

$$\implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ für } \gamma^* \subset U_R(z_0).$$

□

Dieses Korollar ist die Junior-Version vom CHAUCHYSchen Integralsatz. Es gilt nicht einfach

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \text{ für } \gamma^* \subset U.$$

Beispiel? Quiz!

4.3 Nullstellen holomorpher Funktionen und der Fundamentalsatz der Algebra

Wir beginnen mit einer Folgerung aus der CHAUCHYSchen Integralformel für die Ableitung

4.12 Definition (CAUCHYSISCHE ABSCHÄTZUNG). Sei $f \in \mathcal{H}(U_R(z_0))$ und $\sup\{|f(z)| : z \in U_R(z_0)\} \leq M$. Dann ist

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Beweis. $\xrightarrow{\text{Morera}}$ f analytisch auf $U_R(z_0)$, $r < R$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} |\partial B_r(z_0)| \cdot \max \left\{ \frac{|f(\xi)|}{r^{n+1}} : \xi \in \partial B_r(z_0) \right\} \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!M}{r^n} \end{aligned}$$

Da $0 < r < R$ beliebig, folgt die Behauptung. \square

Wir erinnern daran, dass Funktionen $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ **ganz** heißen.

4.13 Satz (von Lionville). *Jede ganze beschränkte Funktion ist konstant.*

Beweis. Aus der CAUCHYSCHEN Abschätzung folgt, für $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \quad (R > 0),$$

wobei

$$M = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\} < \infty, \text{ da } f \text{ beschränkt.}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} f'(z_0) = 0 \stackrel{z_0 \text{ beliebig}}{\implies} f' \equiv 0 \implies f \text{ konstant.}$$

\square

4.14 Theorem (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom $p(z)$ auf \mathbb{C} besitzt eine Nullstelle*

($\xrightarrow{\text{Induktion}}$ jedes Polynom $p(z)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ läßt sich schreiben als Faktorisierg.)

$$p(z) = c \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

„in Linearfaktoren zerlegen“)

Beweis. Sei p Polynom ohne Nullstelle $\implies \frac{1}{p(z)}$ ist ganz. Da

$$|p(z)| \leq |a_n| |z|^n \left(1 + \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \cdot |z|^{-1} + \dots \right) \text{ für } |z| \geq 1$$

ist $\frac{1}{p(z)}$ beschränkt.

$$\begin{aligned} \text{S.v.Lionville} \implies \frac{1}{p(z)} &= \text{konst} \\ \implies p(z) &= \text{konst} \end{aligned}$$

□

Das nächste Resultat ist wieder von fundamentaler Bedeutung.

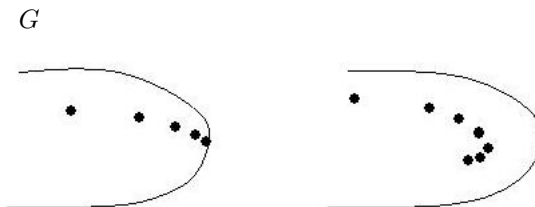
4.15 Satz (Identitätssatz). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $f \equiv 0$.

(ii) Es gibt $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $\{z \in G : f(z) = 0\}$ ist nicht diskret in G .

Hierbei bedeutet (iii), dass nicht jeder Punkt von $\{z \in G : f(z) = 0\}$ in G isoliert ist, dass es ein $z_0 \in G$ gibt mit: z_0 ist Häufungspunkt von $\{z \in G : f(z) = 0\} \setminus \{z_0\}$.



Nullstellen liegen diskret

Nullstellen liegen nicht diskret

$$M \subset G \text{ diskret} \iff \forall w \in G \exists \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(w) \cap M \in \{\emptyset, \{w\}\}$$

Beweis. Klar, dass aus (i) sowohl (ii) als auch (iii) folgen.

(iii) \implies (ii) : Sei $z_0 \in G$ ein Häufungspunkt von $N \setminus \{z_0\}$, $N = \{\text{Nullstellen}\}$ und $r > 0$ so, dass $B(z_0, r) \subset G$.

Da es eine Folge (z_n) in \mathbb{N} gibt mit $z_n \rightarrow z_0$ ist $f(z_0) = 0$. Wir nehmen an, $n \in \mathbb{N}$ sei so, dass

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0), \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \implies f(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für } |z - z_0| < r \\ &= (z - z_0)^n \cdot g(z), \\ g(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} \quad \text{analytisch} \end{aligned}$$

nach Voraussetzung ist $g(z_0) = a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \neq 0 \implies \exists \delta > 0$ mit $g(z) \neq 0$ für $|z - z_0| < \delta$.

Sei $b \in N \cap U_\delta(z_0)$. Dann ist

$$0 = f(b) = \underbrace{(b - z_0)^n}_{\neq 0} \cdot g(b) \quad \text{Widerspruch}$$

(ii) \Rightarrow (i): Sei $U := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0, n \in \mathbb{N}_0\}$. Wegen (ii) ist $U \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass U offen und $G \setminus U$ offen.

$G \setminus U$ offen: Sei (z_n) in U , $z_n \rightarrow z \in G \Rightarrow f^{(k)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(z_n) = 0$, ($k \in \mathbb{N}$), da $f \in C^\infty \Rightarrow z \in U$

U offen: Sei $z_0 \in U$ und $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subset G \Rightarrow f(z) = 0$ in $U_r(z_0) \Rightarrow U_r(z_0) \subset U$. \square

4.16 Korollar. Sei G ein Gebiet, $f, g \in \mathcal{H}(G)$ und $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ sei nicht diskret in G . Dann ist $f \equiv g$.

4.17 Korollar. Sei G ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G) \setminus \{0\}$ und $z_0 \in G$.

(1) Dann gibt es $k \in \mathbb{N}_0, g \in \mathcal{H}(G)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

(2) Es gibt $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset G$ und $f \neq 0$ auf $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

4.4 Der CHAUCHYSCHER INTEGRALSATZ

Wir wissen bereits, dass für $f \in \mathcal{H}(U_R(z_0))$ und jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U_R(z_0)$.

Im CAUCHYSCHEN Integralsatz wird dies für allgemeinere „Geometrien“ (besser „Topologien“) gezeigt. Dass nicht „alles“ stimmt, sieht man an $\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$



4.18 Definition. Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ zwei geschlossene Kurven in $U \subset \mathbb{C}$. Es heißen γ_0, γ_1 **homotop**, $\gamma_0 \sim_h \gamma_1$, wenn es eine stetige Abbildung

$$\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$$

gibt mit

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \Gamma(t, 0) \\ \gamma_1(t) &= \Gamma(t, 1) \\ \text{und } \Gamma(0, s) &= \Gamma(1, s) \quad (s \in [0, 1]) \end{aligned}$$

4.19 Definition. (1) $z_0 \in U$ heißt **Sternzentrum** von U , wenn $[z_0, z] \subset U$ für alle $z \in U$.

(2) U heißt **sternförmig**, wenn U ein Sternzentrum besitzt.

(3) U heißt **konvex**, wenn jedes $z \in U$ Sternzentrum von U ist.

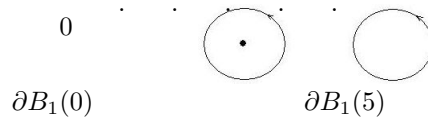
4.20 Proposition. Sei U offen und sternförmig mit Sternzentrum z_0 . Sei $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow U$, $\gamma_0(t) = z_0$. Dann ist jede stückweise glatte geschlossene Kurve γ_1 in U homotop zu γ_0 .

Beweis. $\Gamma(t, s) = s\gamma_1(t) + (1 - s)z_0$. □

4.21 Satz (CAUCHYSCHER INTEGRALSATZ (1te Version)). Seien γ_0, γ_1 geschlossene stückweise glatte Kurven in U , $\gamma_0 \sim_h \gamma_1$. Dann ist

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Damit sehen wir nun, dass



nicht homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind: Integration von $\frac{1}{z}$!

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass $\Gamma(t, s) \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$. Dann existiert für alle $s \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^1 f(\Gamma(t, s)) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) dt \\ &= \int_{\gamma_s} f(z) dz, \end{aligned}$$

wo $\gamma_s = \gamma(\cdot, s)$ geschlossene differenzierbare Kurve

$$\implies g(0) = \int_{\gamma_0} f(z) dz, \quad g(1) = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Rechne

$$\begin{aligned} g'(s) &= \int_0^1 \underbrace{f'(\Gamma(t, s)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \gamma(t, s) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) + f(\Gamma(t, s)) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(t, s)}_{= \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \Gamma \frac{\partial}{\partial s} \Gamma)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} ((f \circ \Gamma) \frac{\partial}{\partial s} \Gamma) dt \stackrel{HDI}{=} f(\Gamma(1, s)) \frac{\partial}{\partial s} \gamma(1, s) - f(\Gamma(0, s)) \frac{\partial}{\partial s} \gamma(0, s) \end{aligned}$$

Da $\Gamma(1, s) = \Gamma(0, s)$ ($s \in [0, 1]$), ist $g'(s) = 0$, also $g(0) = g(1)$.

Beweis. Sei $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ eine Homotopie, insbesondere ist Γ gleichmäßig stetig, $\Gamma[0, 1]^2$ kompakt, $r := d(\Gamma[0, 1]^2, U^c) > 0$, und es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$|(s, t) - (s', t')| < \frac{2}{n} \implies |\Gamma(s, t) - \Gamma(s', t')| < r.$$

Sei

$$\begin{aligned} Z_{jk} &= \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq k, j \leq n \\ I_{jk} &= \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \end{aligned}$$



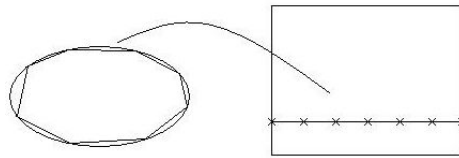
Weil der Durchmesser des Quadrats I_{jk} $\frac{\sqrt{2}}{n}$ ist, ist $\Gamma(I_{jk}) \subset U_r(Z_{jk})$.

Betrachte das Polygon $P_{jk} = [Z_{jk}, Z_{j+1,k}, Z_{j+1,k+1}, Z_{j,k+1}, Z_{jk}]$. Dann ist $P_{jk} \subset U_r(Z_{jk})$. Wegen der Proposition und der Konvexität von U ist

$$\int_{P_{jk}} f(z) dz = 0.$$

Wir zeigen nun $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$ mit folgender Idee: sei $\beta_k : [0, 1] \rightarrow U$ eine Parametrisierung des geschlossenen Polygonzugs

$$Q_k = [Z_{0,k}, Z_{1,k}, \dots, Z_{n,k}]$$



Unter Benutzung der P_{jk} zeigen wir

$$\int_{\beta_k} f(z) dz = \int_{\beta_{k+1}} f(z) dz$$

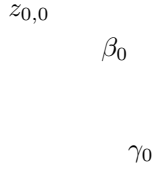
und damit (Stufe für Stufe)

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz \stackrel{!}{=} \int_{\beta_0} f(z) dz = \int_{\beta_1} f(z) dz = \int_{\beta_n} f(z) dz \stackrel{!}{=} \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Wir fangen mit ! an.

Da wir in der konvexen Menge $U_r(z_{0,0})$ sind, ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f(z) dz &= \int_{\gamma_0|_{[0, \frac{1}{n}]}} f(z) dz + \int_{\gamma_0|_{[\frac{1}{n}, 1]}} f(z) dz \\ &= \int_{\beta_0|_{[0, \frac{1}{n}]}} f(z) dz + \int_{\gamma_0|_{[\frac{1}{n}, 1]}} f(z) dz, \end{aligned}$$



denn $\gamma_0|_{[0, \frac{1}{n}]} - \beta_0|_{[0, \frac{1}{n}]}$ ist eine geschlossene stückweise glatte Kurve.

Weiter

$$\begin{aligned} &= \int_{\beta_0|_{[0, \frac{1}{n}]}} f(z) dz + \int_{\gamma_0|_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}} f(z) dz + \int_{\gamma_0|_{[\frac{2}{n}, 1]}} f(z) dz \\ &= \int_{\beta_0|_{[0, \frac{1}{n}]}} f(z) dz + \int_{\beta_0|_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}} f(z) dz + \int_{\gamma_0|_{[\frac{2}{n}, 1]}} f(z) dz \end{aligned}$$

Induktiv ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f(z) dz &= \int_{\beta_0|_{[0, \frac{k}{n}]}} f(z) dz + \int_{\gamma_0|_{[\frac{k}{n}, 1]}} f(z) dz \quad \text{für alle } k \leq n \\ &= \int_{\beta_0} f(z) dz \end{aligned}$$

Um

$$\int_{\beta_k} f(z) dz = \int_{\beta_{k+1}} f(z) dz$$

zu zeigen, gehen wir analog vor, es vermitteln jeweils die P_{kl}

$$\begin{aligned} \int_{\beta_k} f(z) dz &= \sum_{l=0}^{n-1} \int_{[z_{l,k}, z_{l+1,k}]} f(z) dz \\ \int_{\beta_{k+1}} f(z) dz &= \sum_{l=0}^{n-1} \int_{[z_{l,k+1}, z_{l+1,k+1}]} f(z) dz \end{aligned}$$

γ_{k+1}
 γ_k $z_{l,k}$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{\beta_k} f(z) dz - \int_{\beta_{k+1}} f(z) dz \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \int_{P_{l,k}} f(z) dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn auf jeden Term können wir die Proposition anwenden. \square

4.22 Definition. Ein stückweise glatter Weg heißt **nullhomotop** in U , wenn er zu einem konstanten Weg in U komotop ist.
 Kurzschreibweise: $\gamma \sim 0$.

4.23 Satz (CHAUCHYSCHER INTEGRALSATZ (2te Version)). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und γ ein stückweise glatter nullholomorpher Weg. Dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für $f \in \mathcal{H}(U)$.

4.24 Definition. Zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ heißen **FEP-homotop** in U , wenn es ein stetiges $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ gibt mit

$$\begin{aligned} \Gamma(t, 0) &= \gamma_0(t), & \Gamma(t, 1) &= \gamma_1(t) & (t \in [0, 1]) \\ \Gamma(0, s) &= a, & \Gamma(1, s) &= b & (s \in [0, 1]) \end{aligned}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass für FEP-homotope γ_0, γ_1 die Differenz $\gamma_0 - \gamma_1$ nullhomotop ist. Damit

4.25 Korollar. Sei $U \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ und γ_0, γ_1 FEP-homotop. Dann

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

4.26 Definition. Eine offene Menge U heißt **einfach zusammenhängend**, wenn U zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in U nullhomotop ist.

4.27 Satz (CHAUCHY (3te Version)). Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f \in \mathcal{H}(U)$, γ ein geschlossener Weg in U . Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

4.5. DER INDEX VON WEGEN, CHAUCHY'S INTEGRALFORMEL 37

4.28 Korollar. G sei einfach zusammenhängend, $f \in \mathcal{H}(G) \implies f$ besitzt eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $z_0 \in G$, $F(w) := \int_{\gamma_w} f(z) dz$, wobei γ_w ein stückweise glatter von z_0 nach w wohldefinierter Weg (wegen CHAUCHY).

Zeige: F ist Stammfunktion. Dazu $w \in G$, $r > 0$ mit $B_r(w) \subset G$ und $|h| < r \implies [w, w+h] \subset G$ und

$$F(w+h) - F(w) \stackrel{\text{Satz}}{=} \int_{[w, w+h]} f(z) dz$$

Wie beim Satz von Morera folgt damit $F'(w) = f(w)$. □

4.5 Der Index von Wegen, CHAUCHY's Integralformel

4.29 Proposition. Sei γ ein stückweise glatter Weg, $z_0 \notin \gamma^*$. Dann ist

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

Beweis. Nur für $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ differenzierbar, sonst Homotopie; sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$.

$$\begin{aligned} \implies & g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \\ \implies & \frac{d}{dt} e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) = e^{-g(t)} \gamma'(t) - e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) g'(t) = 0 \\ \implies & e^{-g(\cdot)} (\gamma(\cdot) - z_0) \text{ konstant} \\ & \gamma(0) - z_0 = e^{-g(1)} (\gamma(1) - z_0) \\ \implies & g(1) \in 2\pi i \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

4.30 Definition. Sei γ ein geschlossener stückweise glatter Weg und $z_0 \notin \gamma^*$. Dann heißt

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz$$

der **Index** von γ bzgl. z_0 oder die **Windungszahl** von γ um z_0 .

4.31 Proposition. Seien $\gamma, \tilde{\gamma}$ stückweise glatt

(a) $z_0 \notin \gamma^* \implies n(\gamma, z_0) = -n(-\gamma, z_0)$

(b) $z_0 \notin \gamma^* \cup \tilde{\gamma}^*$ und $\gamma, \tilde{\gamma}$ haben denselben Anfangspunkt $\Rightarrow n(\gamma + \tilde{\gamma}, z_0) = n(\gamma, z_0) + n(\tilde{\gamma}, z_0)$

(c) Sind γ und $\tilde{\gamma}$ homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, so ist $n(\gamma, z_0) = n(\tilde{\gamma}, z_0)$

4.32 Satz. Sei γ ein geschlossener stückweise glatter Weg in \mathbb{C} . Dann ist $n(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig, also konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \gamma^* =: \Omega$ und $n(\gamma, \cdot)$ verschwindet auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von Ω .

Beweis. Einfach. □

CHAUCHY'S INTEGRALFORMEL: Sei $f \in \mathcal{H}(U)$ und γ ein stückweise glatter geschlossener Weg, nullhomotop. Dann gilt für $z_0 \notin \gamma^*$:

$$n(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweis. Falls $z_0 \notin \gamma^*$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i n(\gamma, z_0) \end{aligned}$$

□

Folgerung. Die CHAUCHYSCHEN Integralformeln für die Ableitung


$$n(\gamma, z_0)f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz.$$

5 Isolierte Singularitäten

Hier geht es um Funktionen, die in $U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ holom.

5.1 Klassifikation isolierter Singularitäten

Notation:

$$\begin{aligned}
 U_{r,R}(z_0) &= \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \\
 &= \text{Insbesondere } U_R(z_0) \setminus B_r(z_0) \\
 U_{0,R}(z_0) &= U_R(z_0) \setminus \{z_0\}
 \end{aligned}$$


5.1 Definition. Eine Funktion f hat eine isolierte Singularität am Punkt z_0 , wenn es $R > 0$ so gibt, dass f holomorph ist auf $U_{0,R}(z_0)$. Diese Singularität heißt **hebbar**, wenn f holom auch $U_R(z_0)$ fortsetzbar ist.

5.2 Beispiel. $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z}$, $\exp(\frac{1}{z})$ haben isolierte Singularitäten in 0. Hebbar nur für die erste Funktion.

5.3 Satz. Sei $f \in \mathcal{H}(U_{0,R}(z_0))$. Die Singularität von f in z_0 ist hebbar genau dann, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0 \quad (\star)$$

Beweis. notwendig: gilt

$$\text{hinreichend: Setze } h(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\implies h \in C(U_R(z_0))$$

Wenn wir $h \in \mathcal{H}(U_R(z_0))$ zeigen können, sind wir fertig:

$$\stackrel{h(z_0)=0}{\implies} h(z) = (z - z_0)g(z) \text{ mit } g \in \mathcal{H}(U_R(z_0))$$

$$\implies f(z) = g(z) \text{ für } z \in U_{0,R}(z_0)$$

Die Holomorphie von h wird mit dem Satz von Morera gezeigt.

z_2

•
 z_0

z_3

△
 z_1

$$\stackrel{(\star)}{\implies} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left| \int_{[z_1, z_2, z_3]} h(z) dz \right| < \varepsilon \text{ für } z_1, z_2, z_3 \in B_\delta(z_0)$$

Sei $[w_1, w_2, w_3]$ Dreiecksweg in $U_R(z_0) \implies \exists z_1, z_2, z_3 \in B_\delta(z_0)$ mit $[z_1, z_2, z_3] \sim_h [w_1, w_2, w_3]$

$$\begin{array}{l} w_3 \\ w_2 \\ z_0 \bullet \\ w_1 \circlearrowleft \end{array} \implies \left| \int_{[w_1, w_2, w_3]} f(z) dz \right| \stackrel{\text{CIS}}{=} \left| \int_{[z_1, z_2, z_3]} f(z) dz \right| \leq \varepsilon$$

ε beliebig. □

Wir sehen, dass jede Funktion $f \in \mathcal{H}(U_{0,R}(z_0))$, die beschränkt ist, bereits holomorph fortsetzbar ist (Riemannscher Hebbarkeitssatz).

5.4 Definition. Sei $f \in \mathcal{H}(U_{0,R}(z_0))$, z_0 heißt **Pol** von f , wenn $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow z_0$. Ist z_0 weder Polstelle noch hebbbar, so sagen wir: f hat eine **wesentliche Singularität** bei z_0 .

5.5 Beispiel. $\exp \frac{1}{z}$ hat wesentliche Singularität in 0, $(z - z_0)^{-m}$ einen Pol, $m \geq 1$.

5.6 Proposition. Sei U offen, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{z_0\})$ mit Pol bei z_0 . Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $g \in \mathcal{H}(U)$ mit $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$.

Beweis. Nach Satz hat $\frac{1}{f(z)}$ hebbare Singularität bei z_0

$$\implies \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m h(z) \text{ mit } m \in \mathbb{N}, h \in \mathcal{H}(U_r(z_0)), h(z_0) \neq 0$$

für geeignetes $r > 0$.

$$\implies f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad z \in U_r(z_0)$$

für $g(z) = \frac{1}{h(z)}$. □

5.7 Definition. $f \in \mathcal{H}(U_{0,R}(z_0))$ habe einen Pol bei z_0 . Dann heißt $m_{z_0} = \min\{k : (z - z_0)^k f(z) \in \mathcal{H}(U_R(z_0))\}$ die **Ordnung** des Poles.

5.2 Laurentreihen

Sei $(a_n)_n \in \mathbb{Z}$ eine „Folge“. Wir nennen die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ **absolut konvergent**, wenn die Reihen $\sum_{n \geq 0} a_n$ und $\sum_{n \geq 1} a_{-n}$ absolut konvergent sind. In diesem Fall heißt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum_{n \geq 0} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

die **Summe** der Reihe. Entsprechend wird die **gleichmäßige absolute Konvergenz** von Funktionenreihen definiert. Das benutzen wir in

5.8 Satz. Sei $0 \leq r < R$, $f \in \mathcal{H}(U_{r,R}(z_0))$. Für $\rho \in (r, R)$ setze

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig absolut auf jeder kompakten Teilmenge von $U_{r,R}(z_0)$.

Beweis. O.E. $z_0 = 0$; sei $r < r_1 < |z| < r_2 < R$



Das 0 -Homotop in $U_{r,R}$, folgt

$$\gamma =$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho}_{=: f_2(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(0)} \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho}_{=: f_1(z)} \end{aligned}$$

Damit ist $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$, wobei f_2 eine holomorphe Fortsetzung auf $U_{r_2}(0)$ besitzt und f_1 eine Fortsetzung auf $U_{r_1}(0)^C$ besitzt.

Wie für CIS können wir bei $f_2: \frac{1}{\rho - z} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{1 - \frac{z}{\rho}} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\rho}\right)^n$ entwickeln, da $|\rho| > |z|$ für $\rho \in \partial B_{r_2}(0)$.

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_2}(0)} \frac{f(\rho)}{\rho^{n+1}} d\rho \right\} z^n.$$

Auf $\partial B_{r_1}(z)$ ist $|\rho| < |z|$, also

$$\frac{1}{\rho - z} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{z}} \right) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{z}\right)^n;$$

eingesetzt.

$$\begin{aligned} -f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_1}(0)} f(\rho) \rho^n d\rho \right\} z^{-(n+1)} \\ f(z) &= f_2(z) - f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

mit a_n wie behauptet.

Dabei ist a_n vom Radius unabhängig (CIS). Gleichmäßige Konvergenz mit geometrischer Reihe als Majorante. \square

5.9 Korollar. Sei z_0 eine isolierte Singularität von f und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung. Dann gilt

- (1) f hat hebbare Singularität bei $z_0 \iff a_n = 0$ für $n < 0$.
- (2) f hat Pol der Ordnung $m \iff a_n = 0$ für $n < -m$.
- (3) f hat wesentliche Singularität $\iff a_n \neq 0$ für unendlich viele $n \in -\mathbb{N}$.

5.3 Residuen

5.10 Definition. Sei $f \in \mathcal{H}(U_{0,R}(z_0))$ mit isolierter Singularität bei z_0 . Dann heißt

$\sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n$ der **Hauptteil** der Laurentreihe.

Der Koeffizient a_{-1} heißt **Residuum** von f bei z_0 .

Notation: $a_{-1} =: \text{res}(f, z_0)$

Das „Residuum“ ist der Widerstand der Singularität gegen den CIS. Es gilt der

5.11 Satz (Residuensatz). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1, \dots, z_n \in U$, verschieden und $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$. Sei γ ein stückweise glatter geschlossener Weg in U . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n 2\pi i \text{res}(f, z_i) \cdot n(\gamma, z_i).$$

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, zeigen wir, wie nützlich der Residuensatz bei der Berechnung reeller Integrale sein kann:

5.12 Beispiel. Für $a > 0$ ist

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Begründung. Für $z = e^{i\theta}$ ist $\bar{z} = \frac{1}{z}$ und damit

$$a + \cos \theta = a + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 2az + 1}{2z}$$

$$\implies \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = -i \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1},$$

denn

$$\begin{aligned} -i \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} &= -i \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 2ae^{i\theta} + 1} d\theta \\ &= 1 \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 2ae^{i\theta} + 1}}_{=\frac{1}{\frac{1}{2}a + \cos \theta}} d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = ?$$

Residuensatz: Nullstellen von $z^2 + 2az + 1$ bei $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$

$$\begin{aligned} \implies f(z) &= \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = \frac{1}{z - \beta} \cdot \sum_{n \geq 0} a_n (z - \beta)^n \\ \text{Res}(f, \beta) &= \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} \\ \implies \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} &= 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{i\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \\ \implies \int_0^\pi \frac{1}{a + \cos \theta} d\theta &= -i \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \end{aligned}$$

Bei vielen bestimmten Integralen mit π drin, kann man den Residuensatz verwenden.