

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Skript zur Vorlesung

ANALYSIS II FÜR PHYSIKER

Prof. Stollmann

SS 2002

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Differentiation | 3 |
| 1.1 | Differenzierbarkeit: Definition und erste Eigenschaften | 3 |
| 1.2 | Lineare Approximation und Tangenten | 5 |
| 1.3 | Ableitung der Umkehrfunktion und Kettenregel | 7 |
| 1.4 | Höhere Ableitungen und partielle Ableitungen | 8 |
| 1.5 | Lokale Extrema, Mittelwertsatz und Satz von Rolle | 9 |
| 2 | Integration | 13 |
| 2.1 | Das Riemann-Integral | 13 |
| 2.2 | Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“ | 19 |
| 2.3 | Uneigentliche Integrale | 22 |
| 3 | Konvergenz von Funktionenfolgen | 26 |
| 3.1 | Gleichmäßige Konvergenz und Vertauschungssätze | 26 |
| 3.2 | Potenzreihen | 29 |
| 4 | Funktionen mehrerer Veränderlicher | 33 |
| 4.1 | Stetige Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n | 33 |
| 4.2 | Differentiation von Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n | 36 |
| 4.3 | Differentiationsregeln und Mittelwertsätze | 44 |
| 4.4 | Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor | 47 |
| 4.5 | Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen | 51 |

1 Differentiation

1.1 Differenzierbarkeit: Definition und erste Eigenschaften

Die Ableitung einer Funktion ist ein besonders wichtiger Begriff der Analysis, welcher wiederum auf dem Begriff des Grenzwertes aufbaut. Seine Bedeutung in der Mechanik (Geschwindigkeit, Beschleunigung) kennen wir zum Teil schon aus dem Crash-Kurs.

1.1 Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f ist **differenzierbar in** x_0 , genau dann wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Weiter heissen $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **Differenzenquotienten** von f bei x_0 und, falls existent,

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x) =: \frac{df}{dx}(x_0)$$

die **Ableitung** von f in x_0 , bzw. **Differentialquotient**.

f heisst **differenzierbar (in D)**, wenn f in allen Punkten $x_0 \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall erhalten wir durch

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

eine Funktion, die **Ableitung** von f .

Schwierig ist die Existenz der Ableitung dadurch, dass der Nenner gegen 0 geht.

1.2 Beispiel. (1) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ ist differenzierbar.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } x \rightarrow x_0.$$

(2) Die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ist differenzierbar.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a = f'(x_0).$$

(3) Die Parabelfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist differenzierbar.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} = (x + x_0) \rightarrow 2x_0 = f'(x_0) \text{ f\u00fcr } x \rightarrow x_0.$$

(4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist bei 0 nicht differenzierbar, für $x_0 \neq 0$ schon. Sei $x_n := (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, damit $x_n \rightarrow 0$

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n \quad \text{divergent,}$$

also existiert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{nicht.}$$

(5) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist differenzierbar.

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) = \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{x_0 - x}{xx_0} \right) = -\frac{1}{xx_0} \rightarrow -\frac{1}{x_0^2} \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

1.3 Satz. Für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0).$$

Die Exponentialfunktion ist sogar komplex differenzierbar.

Beweis. Folgende zwei Fälle müssen untersucht werden:

- (i) Für $z_0 = 0$ wurde das schon gezeigt.
- (ii) Für allgemeine z_0 gilt:

$$\frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0) \left(\frac{\exp(z - z_0) - 1}{(z - z_0) - 0} \right) \rightarrow \exp(z_0).$$

□

1.4 Korollar. Die Funktionen \exp, \cos, \sin sind differenzierbar in \mathbb{R} . Für die Ableitungen gilt:

$$\exp' = \exp, \quad \cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos.$$

Beweis. • Der Satz ist klar für \exp , da dies ein Spezialfall von Satz 1.3 ist.

- Ableitung von \cos, \sin : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

$$\Rightarrow \frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{x - x_0} = i \frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{ix - ix_0} \xrightarrow{\text{Satz 1.3}} i e^{ix_0} = -\sin x_0 + i \cos x_0$$

Real- und Imaginärteile:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{x - x_0} \right) &= \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} \rightarrow -\sin x_0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \\ \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{x - x_0} \right) &= \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \rightarrow \cos x_0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

□

Arithmetik von Ableitungen:

1.5 Satz. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar, sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g, \lambda f, f \cdot g$ in x differenzierbar und es gilt

$$(i) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

$$(ii) (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{„Produktregel“}$$

(iii) Ist $g(x) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x definiert, differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{„Quotientenregel“}.$$

Die einfachen Beweise lassen wir hier weg. Als Anwendung erhält man z.B.

1.6 Beispiel. (1) Sei $f_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$f_k'(x) = k \cdot x^{k-1}.$$

(für $k < 0$ nur für $x \neq 0$ definiert.)

(2) Definiere $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$. Es ist auch \tan differenzierbar und

$$\tan'(x) = \dots = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x.$$

1.2 Lineare Approximation und Tangenten

Nun kommen wir zu einer Charakterisierung der Differenzierbarkeit, deren Bedeutung erst in höheren Dimensionen wirklich klar wird.

1.7 Satz. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{D} \setminus \{a\}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Äquivalent sind

(i) f ist differenzierbar in a .

(ii) $\exists c \in \mathbb{R} \exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$ so dass

$$f(x) = \underbrace{f(a) + c \cdot (x - a)}_{\text{affin linear}} + \varphi(x) \quad (x \in D).$$

In diesem Falle ist $c = f'(a)$. $y = f(a) + F'(a) \cdot (x - a)$
„Tangente“



Die Tangente $t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ approximiert f an der Stelle a in „erster Ordnung“, d.h. der Fehler $\varphi(x)$ geht bei a schneller gegen 0 als $x - a$ (linear).

Beweis. [(zu Satz 1.7)] „(i) \Rightarrow (ii)“:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) \\ \Rightarrow f(x) &:= f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \varphi(x)\end{aligned}$$

und

$$\frac{\varphi(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow a,$$

weil f differenzierbar ist.

„(ii) \Rightarrow (i)“:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a) + c \cdot (x - a) + \varphi(x) - f(a)}{x - a} = c + \frac{\varphi(x)}{x - a} \rightarrow c,$$

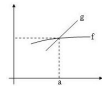
also ist f differenzierbar bei a mit $f'(a) = c$. □

1.8 Korollar. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$.

f ist differenzierbar in $a \iff f$ stetig in a .

Beweis. $f(x) \stackrel{\text{Satz 1.7}}{=} f(a) + \underbrace{f'(a) \cdot (x - a) + \varphi(x)}_{\substack{\text{Man könnte sagen, } f \text{ approximiert } g \\ \text{(in 0-ter Ordnung) am Punkt } a, \text{ wenn} \\ \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = 0.}}$ für $x \rightarrow a$. □

Nun noch etwas mehr zur „linearen Approximation“:



f approximiert g in erster Ordnung (linear) in a , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0,$$

d.h. wenn der „Fehler“ $f(x) - g(x)$ bei Annäherung an a schneller als linear fällt.

Allgemeiner:

f approximiert g in k -ter Ordnung im Punkt a , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^k} = 0.$$

Bemerkung. (a) f ist stetig im Punkt a

$\iff f$ approximiert die konstante Funktion $f(a)$

$\iff \exists c$ so, dass f die konstante Funktion c approximiert.

(b) f ist differenzierbar im Punkt a

$\iff f$ approximiert die affine Funktion $f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ in erster Ordnung

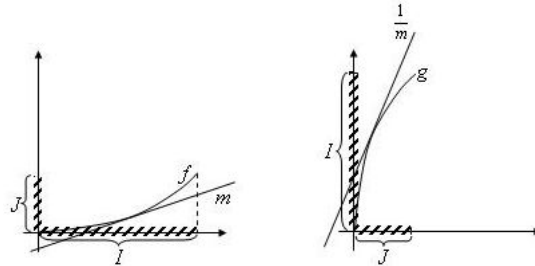
\iff es gibt eine affine Funktion, die f in erster Ordnung approximiert.

1.3. ABLEITUNG DER UMKEHRFUNKTION UND KETTENREGEL

1.3 Ableitung der Umkehrfunktion und Kettenregel

1.9 Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $J := f(I)$ und $g := f^{-1} : J \rightarrow I$. Ist $x \in I$, f differenzierbar in x und $f'(x) \neq 0$, so ist g in $f(x) =: y$ differenzierbar und $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$.

Für die Umkehrfunktion werden x und y vertauscht. Also ist der Graph von $f^{-1} = g$ das Bild des Graphen von f unter der Spiegelung an der Winkelhalbierenden.



Was ist für $f'(x) = 0$?

Beweis. (von Satz 1.9) Sei $(y_n) \subset J \setminus \{y\}$, $y_n \rightarrow y$,

$$\frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)},$$

wenn wir $x_n := g(y_n)$ definieren. Nun konvergiert

$$\frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \left(\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right)^{-1} \rightarrow (f'(x))^{-1}.$$

□

1.10 Beispiel. $\ln' = \frac{1}{x}$; setze $f = \exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $g = \ln = \exp^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Für $y > 0$ folgt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

1.11 Satz (Kettenregel). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$. Sei f in x differenzierbar und g in $f(x)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in x differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beweis. Setze $y := f(x)$, $g^* : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g^*(\eta) := \begin{cases} \frac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} & : \text{für } \eta \neq y \\ g'(y) & : \text{für } \eta = y \end{cases}$$

Da g in y differenzierbar ist, gilt $\lim_{\eta \rightarrow y} g^*(\eta) = g^*(y) = g'(y)$.

Für alle η ist $g(\eta) - g(y) = (\eta - y)g^*(\eta)$. (★)

Mit diesen Vorüberlegungen gilt

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(\xi) - g \circ f(x)}{\xi - x} &= \frac{g(f(\xi)) - g(y)}{\xi - x} \stackrel{(\star)}{=} \frac{g^*(f(\xi))(f(\xi) - y)}{\xi - x} \\ &= g^*(f(\xi)) \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \xrightarrow{\xi \rightarrow x} g'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

□

1.4 Höhere Ableitungen und partielle Ableitungen

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so definiert $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche man wieder auf Differenzierbarkeit untersuchen kann.

1.12 Definition. Ist f' an der Stelle x_0 differenzierbar, so nennt man

$$(f')'(x_0) =: f''(x_0) =: \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

die **zweite Ableitung** von f in x_0 .

Induktiv wird die **k -te Ableitung** von f an der Stelle x_0 definiert und mit

$$f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)} \right)'(x_0)$$

Es heisst $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist k -mal differenzierbar bei x_0 , wenn die k -te Ableitung existiert (d.h. f ist differenzierbar, f' ist differenzierbar, ..., $f^{(k-1)}$ ist differenzierbar in x_0).

1.13 Definition. f heisst **k -mal stetig differenzierbar** in D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn f überall in D k -mal differenzierbar und die k -te Ableitung $f^{(k)}$ zusätzlich stetig ist.

Bezeichnung:

$$\begin{aligned} C^k(D) &= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}, \\ C^0(D) &= C(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\} \end{aligned}$$

Natürlich ist $C^0(D) \supset C^1(D) \supset C^2(D) \supset \dots$

Wir wollen schon einen voreiligen Blick auf den d -dimensionalen Fall wagen:

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bzw. } f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}$$

Ist $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $e_k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \dots)$ der k -te Einheitsvektor, so wird durch

$$g_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto f(x_0 + te_k)$$

für $\varepsilon > 0$ klein genug eine Funktion $g_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die **partielle Funktion** in Richtung e_k . Ist diese Funktion für $t = 0$ differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) := g'_k(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + h \cdot e_k - f(x_0)}{h}$$

die **k -te partielle Ableitung** von f , bzw. **partielle Ableitung in Richtung e_k** .

1.14 Beispiel. $H : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}, H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) := \frac{1}{2} \|p\|^2 - \|q\|^2$. Hier würde man die partiellen Ableitungen entsprechend mit $\frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i, \frac{\partial H}{\partial q_k} = 2q_k$.

(Wichtiger physikalischer Hintergrund: die Hamiltonfunktion für den harmonischen Oszillator.)

1.5 Lokale Extrema, Mittelwertsatz und Satz von Rolle

Alles beginnt mit einer

1.15 Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \in D$.

f hat an der Stelle x ein **lokales Maximum** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall \xi \in (x-\delta, x+\delta) : f(\xi) \leq f(x)$.

f hat an der Stelle x ein **globales Maximum** $\Leftrightarrow \forall \xi \in D : f(\xi) \leq f(x)$.

f hat an der Stelle x ein **lokales/globales Minimum** $\Leftrightarrow -f$ hat an der Stelle x ein lokales/globales Maximum.

Ein **Extremum** ist ein Maximum oder Minimum.

f hat bei x ein **striktes Extremum** $\Leftrightarrow \forall \xi \in D : f(\xi) \neq f(x)$.

1.16 Satz. In $x_0 \in (a, b)$ besitze $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Extremum. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist

$$f'(x_0) = 0.$$

Beachte: $f'(x_0) = 0$ ist notwendig aber nicht hinreichend. Z.B. hat $f(x) = x^3, f'(0) = 0$ aber kein Extremum bei $x_0 = 0$!

Beweis. (von Satz 1.16): Wir betrachten o.E.d.A. den Fall, dass f ein Minimum besitze. Sei $x_n \searrow x_0$, dann ist

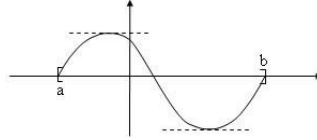
$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ist andererseits $y_n \nearrow x_0$, so gilt

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Insgesamt: $f'(x_0) = 0$. □

1.17 Satz (Rolle, 1652-1719). Sei $a, b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b) = 0$ in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

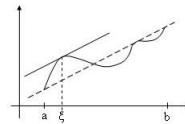


Beweis. Nach Satz (welcher?) aus Analysis I besitzt f in $[a, b]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ist eine dieser Stellen x_0 in (a, b) , so ist $f'(x_0) = 0$ nach dem vorherigen Satz. Haben wir als Minimum- und Maximumstelle jeweils a, b gefunden, so ist $F \equiv 0$. \square

Als Korollar können wir von der Voraussetzung $f(a) = f(b) = 0$ absehen:

1.18 Korollar (Mittelwertsatz). Sei $a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Setze

$$F(x) := f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)}_{\text{Gleichung der Sekante}}$$

$\implies F(a) = F(b) = 0 \stackrel{\text{S.v.Rolle}}{\implies} \exists \xi : F'(\xi) = 0$, also

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

\square

1.19 Korollar. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in (a, b) .

- (a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.
- (b) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton steigend.
- (c) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton steigend.

Analoges gilt für $f' < 0$ bzw. $f' \leq 0$.

Beweis. (a) Sei $a \leq x < y \leq b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (x, y)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) = 0.$$

(b) $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0$

(c) $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0$

□

1.20 Korollar. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und ist $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), so besitzt f in x ein striktes lokales Maximum (Minimum).

Beweis.

$$0 > f''(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} \stackrel{f'(x)=0}{=} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f'(y)}{y - x}$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : 0 > \frac{f'(y)}{y - x} \quad (0 < |y - x| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow f'(y) > 0 \text{ für alle } y \in (x - \varepsilon, x) \wedge f'(y) < 0 \text{ für alle } y \in (x, x + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow f \text{ ist in } (x - \varepsilon, x) \text{ streng monoton steigend} \wedge f \text{ hat in } x \text{ ein striktes lokales Maximum.}$$

□

1.21 Korollar (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Beweis. Betrachte $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = (f(b) - f(x))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

$\Rightarrow F(a) = F(b) = 0$. Satz von Rolle: $\exists \xi \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} 0 &= F'(\xi) \\ &= (f(b) - f(a))g'(\xi) - f'(\xi)(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

□

1.22 Korollar (Regel von de l'Hospital, 1661-1704). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$, $f(a) = g(a) = 0$. Existiert $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Sei $x_n \searrow a$. Zeige $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Mit verallgemeinertem Mittelwertsatz wähle $\xi \in (a, x_n)$ mit

$$(f(x_n) - \underbrace{f(a)}_{=0})g'(\xi_n) = (g(x_n) - \underbrace{g(a)}_{=0})f'(\xi_n)$$

Da mit $x_n \searrow a$ auch $\xi_n \searrow a$ folgt

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Bemerkung. Entsprechende Aussagen gelten auch für $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$. Die Fälle $a = -\infty, b = +\infty$ sind zugelassen.

1.23 Beispiel. (a) $\lim_{x \searrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = ?$

$$\left(? = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \right)$$

(b) $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

$$\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 = ? \right)$$

(c) $\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} \right) = \dots = 0$

2 Integration

Wir betrachten nun das Riemann-Integral. Für den Mathematiker geht es zunächst um eine geeignete Definition. Der Hauptsatz der Integralrechnung (HDI) wird dann als wichtigstes Hilfsmittel zum Berechnen von Integralen werden.

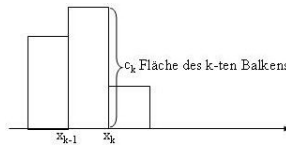
2.1 Das Riemann-Integral

2.1 Definition. Sei $a < b$. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Treppenfunktion**, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt mit φ ist konstant in (x_k, x_{k+1}) für alle $k = 0, \dots, n-1$. Die Menge der Treppenfunktionen wird mit $T[a, b]$ bezeichnet.

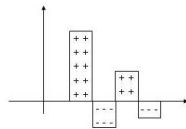
Behauptung: $T[a, b]$ ist ein Vektorraum.

2.2 Definition. Sei $\varphi \in T[a, b]$ mit der Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $\varphi(x) = c_k$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \dots, n$. Dann ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$



Bemerkung. $\int_a^b \varphi(x) dx \in \mathbb{R}$ entsteht als „gewichteter“ Flächeninhalt zwischen Graph und x -Achse, Flächen unter der x -Achse werden negativ gezählt.



2.3 Lemma. Seien $\varphi, \psi \in T[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(i) \quad \int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx,$$

$$(ii) \quad \int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b \varphi(x)dx,$$

$$(iii) \quad \varphi \geq 0 \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0,$$

$$(iv) \quad \left| \int_a^b (\varphi)(x)dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|dx.$$

Die ersten beiden Eigenschaften kann man dadurch zusammenfassen, dass man sagt

$$I : T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$$

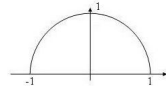
ist linear.

Die Eigenschaften (iii), (iv) heissen manchmal auch **Monotonie** bzw. **Positivität** des Integrals.

Aus (iii) folgt natürlich (betrachte $\psi - \varphi$)

$$\varphi \leq \psi \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$$

Wir wollen nun versuchen $I : T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einen größeren Vektorraum fortzusetzen. Bis jetzt können wir ja nur Treppenfunktionen integrieren und so interessante Beispiele wie das folgende funktionieren so nicht.



$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} \text{ Kreisfläche}$$

Bei der Fortsetzung sollten Linearität und Monotonie bestehen bleiben.

2.4 Definition. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann existieren

$$\underline{\int} f := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} \quad \text{Unterintegral und}$$

$$\overline{\int} f := \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)dx : \psi \in T[a, b], f \leq \psi \right\} \quad \text{Oberintegral von } f.$$

Hat man eine „vernünftige“ Fortsetzung $I(f)$ für f gefunden, so ist wegen der Monotonie

$$\underline{\int} f \leq I(f) \leq \overline{\int} f.$$

Die Riemann-integrierbaren Funktionen sind die, für die diese Ungleichung den Wert von $I(f)$ schon festlegt.

2.5 Definition. Wir nennen f **Riemann-integrierbar**, wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist und $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. Der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen ist $R[a, b]$.

Ziel: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ Riemann-integrierbar.

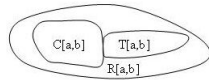
2.6 Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x, y \in I : |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Angenommen die Aussage des Satzes gilt nicht, dann existiert $\varepsilon > 0$ und $x_n, y_n \in I$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Wähle konvergente Teilfolge (x_{n_k}) (I kompakt)

$$x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}, \text{ da } |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq k^{-1}$$

$\varepsilon < |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow 0$, da f stetig \implies *Widerspruch*. □



Dies folgt aus

2.7 Satz. $C([a, b]) \subset R([a, b])$.

Beweis. Jedes $f \in C([a, b])$ ist nach S.v. Maximum beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit $|y - x| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Möglich nach Satz 2.6.

Wähle Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $|x_k - x_{k+1}| \leq \delta$. Dann folgt

$$\left| \underbrace{\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)}_{=: d_k} - \underbrace{\min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)}_{=: c_k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= d_k \text{ für } x \in [x_{k-1}, x_k), f(b) \text{ für } x \in b \\ \varphi(x) &:= c_k \text{ für } x \in [x_{k-1}, x_k), f(b) \text{ für } x \in b \end{aligned}$$

folgt $\psi, \varphi \in T[a, b]$, $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| &\leq \sum_k (d_k - c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_k \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\overline{\int} f - \underline{\int} f \leq \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Da ε beliebig, ist $f \in R[a, b]$. □

Bemerkung.

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b] \text{ mit} \\ \varphi \leq f \leq \psi \text{ und } \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Riemannsches Integritätskriterium:

Bemerkung. $f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq f \leq \psi$ mit $\int \psi - \int \varphi \leq \varepsilon$

2.8 Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis. Ohne Einschränkung sei f monoton steigend $\Rightarrow f$ beschränkt. Fixiere ein $n \in \mathbb{N}$: Wähle Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_n = b$ mit $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x_{i-1}) \text{ falls } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \varphi(b) := f(b) \\ \psi(x) &:= f(x_i) \text{ falls } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \psi(b) := f(b) \\ &\Rightarrow \varphi \leq f \leq \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi - \varphi)(x) dx &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

n ist beliebig (für große n wird die rechte Seite beliebig klein).

$$\Rightarrow \underline{\int} f = \overline{\int} f \Rightarrow f \in R[a, b].$$

□

2.9 Satz. Sei $f \in R[a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit „Feinheit“ $\max_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) < \delta$ und beliebige $f_i \in [\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)]$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f_i (x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Bemerkung. Ist $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $f_i := f(\xi_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ heißt Riemann-Summe.

Wir haben $I : T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (linear und monoton) auf \mathbb{R} fortgesetzt. Jetzt kommen wir zu Linearität und Monotonie

$$I : \mathbb{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_a^b f(x) dx.$$

2.10 Satz (Hilfssatz). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

$$(a) \text{ Für } \lambda \geq 0 \text{ ist } \overline{\int} \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \overline{\int} f(x) dx$$

$$(b) \overline{\int} (f + g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$$

$$(c) \overline{\int} f = -\overline{\int} (-f).$$

Beweis. (a) ist klar für $\lambda = 0$. Sei also $\lambda > 0$: Ist $\varphi \geq f \in T[a, b]$. Dann ist $\lambda \cdot \varphi \geq \lambda \cdot f$.

$$\overline{\int} \lambda f(x) dx \leq \overline{\int} \lambda \varphi(x) dx = \lambda \overline{\int} \varphi(x) dx.$$

Infimum über $\varphi \in T[a, b]$, $\varphi \geq f$:

$$\begin{aligned} \overline{\int} \lambda f(x) dx &\leq \lambda \cdot \overline{\int} f(x) dx = \lambda \overline{\int} \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \right) f(x) dx \\ &\leq \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \overline{\int} \lambda f(x) dx = \overline{\int} \lambda f(x) dx. \end{aligned}$$

(b) Sei $\varphi, \psi \in T[a, b]$, $\varphi \geq f$, $\psi \geq g \Rightarrow f + g \leq \varphi + \psi$.

$$\overline{\int} (f + g)(x) dx \leq \overline{\int} (\varphi + \psi)(x) dx = \overline{\int} \varphi(x) dx + \overline{\int} \psi(x) dx.$$

Infimum über $\varphi \in T[a, b]$, $\varphi \geq f$:

$$\overline{\int} (f + g)(x) dx = \overline{\int} f(x) dx + \overline{\int} \psi(x) dx.$$

Infimum über $\psi \geq g$, $\psi \in T[a, b]$:

$$\overline{\int} (f + g)(x) dx \leq \overline{\int} f(x) dx + \overline{\int} g(x) dx.$$

(c) $\psi \leq f \Leftrightarrow -f = -\psi$. □

2.11 Satz. Seien $f, g \in R[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g, \lambda f \in R[a, b]$, und:

$$(a) \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$(b) \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

$$(c) \text{ Ist } f \leq g, \text{ so gilt } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) dx &= - \left(\int_a^b (-f) dx + \int_a^b (-g) dx \right) \\ &\leq - \left(\int_a^b -(f + g) dx \right) = \int_a^b (f + g) dx \\ &\leq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx. \end{aligned}$$

Da $\int_a^b f dx = \bar{\int} f$, $\int_a^b g dx = \bar{\int} g$: alle „ \leq “ sind „ $=$ “.

(b) folgt sofort aus dem Hilfssatz 2.10.

$$(c) \varphi \geq g \Rightarrow \varphi \geq f \text{ und } \bar{\int} g \geq \bar{\int} f.$$

□

2.12 Korollar. Sei $f \in R[a, b]$. Dann gilt

$$f^+, f^-, |f| \in R[a, b].$$

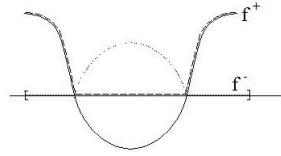
Dabei ist

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := (-f^+)^+, \quad f^+ - f^- = f, \quad |f| = f^+ + f^-$$

Es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \cdot \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

2.2. INTEGRATION UND DIFFERENTIATION, DER „HAUPTSATZ“



Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. $f \in R[a, b]$. Es existieren $\varphi, \psi \in T[a, b]$, $\varphi \leq f \leq \psi$ mit $\int(\psi - \varphi)(x)dx \leq \varepsilon$. Mit $\varphi, \psi \in T[a, b]$ ist auch $\varphi^+, \psi^+ \in T[a, b]$ und $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi \Rightarrow \int(\psi^+ - \varphi^+)(x)dx \leq \int(\psi - \varphi)(x)dx \leq \varepsilon \\
 &\Rightarrow f^+ \in R[a, b] \\
 &\Rightarrow f^- = f^+ - f \in R[a, b], |f| = f^+ + f^- \in R[a, b] \\
 ! &\int_a^b f(x)dx \stackrel{f \leq |f|}{\leq} \int_a^b |f(x)|dx \\
 &-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f)(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx. \\
 ! &|f(x)| \leq \rho := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \\
 &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \rho dx = (b - a)\rho.
 \end{aligned}$$

□

2.13 Satz. Sei $a < b < c$, $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f|_{[a, b]} \in R[a, b] \text{ und } f|_{[b, c]} \in R[a, b].$$

Es gilt dann

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Bemerkung. Für $f : M \rightarrow M'$, $d \subset M$ ist $f|_D : D \rightarrow M'$, $(f|_D)(x) := f(x)$ die Einschränkung von f auf D .

Beweis. Einfach. Man setzt $\int_a^a f(x)dx = 0$. Für $b < a$ gilt $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. □

2.2 Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“

Hier werden wir sehen, dass Integration die „Umkehrung“ der Differentiation ist. Damit werden normalerweise Integrale berechnet. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

2.14 Satz. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$. Definiere $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Dann ist F differenzierbar und $F' = f$.

Beweis. Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) \rightarrow f(x) \text{ für } h \rightarrow 0 : \\ & \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) - f(x) \\ & = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt. \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Mittel über } f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| & \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dx \right| \\ & \leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \sup\{|f(t) - f(x)| : |t - x| \leq |h|\} \rightarrow 0 \\ & \quad \text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

2.15 Definition. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** für f .
Schreibweise: $F = \int f(x)dx$.

Ist $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion, so folgt $F' = G'$, also $G = F + \text{const}$.

2.16 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f eine Stammfunktion und für jede Stammfunktion G gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) =: G(x)|_a^b.$$

Beweis. Mit $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ folgt mit 2.14 die Existenz einer Stammfunktion.

Klar ist: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. \Rightarrow Behauptung für beliebige Stammfunktionen G : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. □

2.2. INTEGRATION UND DIFFERENTIATION, DER „HAUPTSATZ“

2.17 Satz (Substitutionsregel). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

„Eselsbrücke“: $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$.

Beweis. Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f . Für $F \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Aus dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

□

2.18 Beispiel. (a) Für $\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx$ ist $\varphi(t) := t+c$, $\varphi'(t) = 1$.

(b) Für Zahlen $-1 \leq a < b \leq 1$ sei $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$. $\varphi(t) = \sin t$, $\varphi'(t) = \cos t$.

$$\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} \sqrt{1-x^2} dx = \int_u^v \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_u^v \cos^2 t dt.$$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^2 t dt.$$

2.19 Satz (Partielle Integration). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit der Stammfunktion G . Dann gilt

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx.$$

Merkregel: $\int uv' = uv - \int u'v$.

Beweis. Nach der Produktregel und dem Hauptsatz der Integralrechnung ist dieser Satz klar. Die Ableitung der rechten Seite liefert $fg + f'G - f'G = fg$. □

2.20 Beispiel. (1) Es gilt

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_g \cdot \underbrace{\ln x}_f dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

(2) Weiterhin:

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= \int 1 \cdot \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Hierbei ist $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.

(3) Es gilt

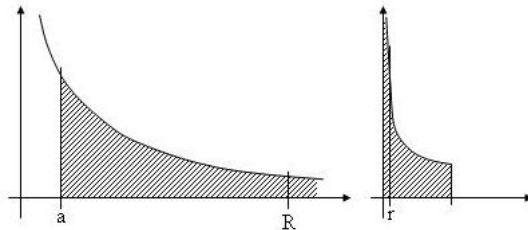
$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 t \, dt = \cos t \cdot \sin t + \int 1 - \cos^2 t \, dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + t - \int \cos^2 t \, dt \\ \Rightarrow \int \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) \Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b}$$

$$\text{Für } a = -1, b = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

2.3 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir beschränkte Intervalle und beschränkte Funktionen betrachtet.



2.21 Definition. Sei $a \in \mathbb{R}$, $b > a$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, b]$, $r < b$ Riemann-integrierbar. Falls

$$\lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

existiert, so heißt f auf $[a, b)$ **uneigentlich R-integrierbar** ($\int_a^b f(x) \, dx$ ist **konvergent**).

Analog für $-\infty \leq a < b < \infty$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und für $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

2.22 Beispiel. (1) Es ist $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ konvergent für $s > 1$ und nicht konvergent für $s \leq 1$.

Beweis: $s \neq 1$:

$$\int_1^r \frac{dx}{x^s} = \int dx x^{-s} = \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^r = \frac{r^{-s+1}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \infty & \text{für } s < 1 \end{cases}$$

Für $s = 1$: (Stammfunktion \ln)

(2) Es konvergiert $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ für $s < 1$, nicht für $s \geq 1$.

Rechnung wie oben: $\frac{r^{-s+1}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \dots$

(3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ konvergiert nicht.

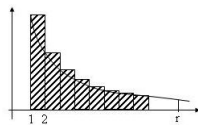
(4) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (-\arctan(-r)) + \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan r = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

2.23 Satz (Integral-Vergleichskriterium für Reihen). Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent.}$$

Beweis. $\sum_{k=2}^N f(k) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{k=1}^N f(k)$



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} &\iff \left(\sum_{k=1}^N f(k) \right)_N \text{ beschränkt} \iff \left(\int_1^N f(x) dx \right) \text{ beschränkt} \\ &\iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent.} \end{aligned}$$

□

2.24 Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} =: \rho(s)$ konvergiert für $s > 1$.

Riemannsche Vermutung: $\rho(s)$ kann man fortsetzen zu einer Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \dots$
 Vermutung: Alle Nullstellen dieser Funktion liegen auf $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

2.25 Beispiel. (1) $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\int_a^b x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \Big|_a^b$

Hierbei:

$s \in \mathbb{N}_0$: $a, b \in \mathbb{R}$

$s \in \mathbb{Z}, s \leq -2$: $a, b > 0$ oder $a, b < 0$

$s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $a, b > 0$.

(2) Es ist

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x \Big|_a^b & \text{für } a, b > 0 \\ \ln(-x) \Big|_a^b & \text{für } a, b < 0 \end{cases}$$

Einfache Schreibweise: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

(3) $\int \sin x dx = -\cos x$, $\int \cos x dx = \sin x$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = +1 + 1 = 0 \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x \quad \text{Vorsicht mit Definitionsbereich!} \end{aligned}$$

(4) $\int \exp x dx = \exp x$

(5) Partialbruchzerlegung: $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ auf $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

Die Zerlegung klappt für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x} \right) = \frac{1}{2} (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

2.26 Satz. Für $x > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\sqrt{x} := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

konvergent. $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ heißt **Gamma-Funktion**. Es gilt: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ für $x > 0$, $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \in \mathbb{N}$)

Beweis. Für $0 < t \leq 1$: $0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$

$$\Rightarrow \int_r^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_r^1 t^{x-1} dt < \infty$$

Für $1 \leq t$: $0 < t^{x-1} e^{-t} = \underbrace{t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}}}_{\rightarrow 0} e^{-\frac{t}{2}} \leq c_x \cdot e^{-\frac{t}{2}}$

$$\Rightarrow \int_1^R t^{x-1} e^{-t} dt \leq c_x \cdot \int_1^R e^{-\frac{t}{2}} dt = (-2) e^{-\frac{t}{2}} \Big|_1^R = 2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-\frac{R}{2}} < \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{konvergent}$$

$$\int_r^R \underbrace{t^x}_u \underbrace{e^{-t}}_v dt = -t^x \cdot e^{-t} \Big|_r^R + x \int_r^R t^{x-1} e^{-t} dt \Rightarrow \Gamma(x+1) = 1.$$

Induktionsschritt: $\Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$ □

3 Konvergenz von Funktionenfolgen

Mit metrischen Räumen haben wir den Begriffsapparat, um Konvergenz nicht nur für Folgen von Zahlen sondern auch für Folgen von Funktionen zu definieren. Das wird dazu führen, dass wir interessante Funktionen mit Hilfe von Grenzübergängen definieren können.

3.1 Gleichmäßige Konvergenz und Vertauschungssätze

Trick: $1 = x^0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^0 = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x^y = 0$??

Wir sehen, dass die Vertauschung von Grenzwerten Probleme bereiten kann. Solche Vertauschungen können auch „versteckt“ in Ableitungen, Integralen etc. auftauchen. Ein Schlüssel ist der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz.

Sei nun M eine Menge, (M', d') ein metrischer Raum.

3.1 Definition. Seien $f_n : M \rightarrow M'$, $n \in \mathbb{N}$, $f : M \rightarrow M'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ punktweise} &: \Leftrightarrow \forall x \in M : f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ in } (M', d') \\ &\Leftrightarrow \forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\ f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} &: \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in M : d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\ &\text{(hier hängt } n_0 \text{ nicht von } x \text{ ab!!)} \end{aligned}$$

3.2 Beispiel. (1) $M = (0, 1)$, $f_n(x) := x^n$. Dann: $f_n \rightarrow 0$ punktweise aber nicht gleichmäßig.

(2) $M = (0, \frac{1}{2})$, $f_n(x) = x^n$. Dann ist $f_n \rightarrow 0$ gleichmäßig.

Bemerkung. Es gilt

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} &\Leftrightarrow \sup_{x \in M} d'(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \\ \text{Für } M' = \mathbb{R}, \mathbb{C} &\Leftrightarrow \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nun der erste Vertauschungssatz, für reelle Funktionen.

3.3 Satz. Sei $a > b$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

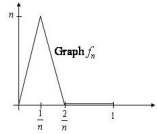
Beweis. einfach. □

Mit anderen Worten: „Unter geeigneten Voraussetzungen“ gilt

$$\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Dass man nicht ohne Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ darf, zeigt das nächste Beispiel:

3.4 Beispiel. Sei $a = 0, b = 1$:



Also:

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Nun ein leicht zu beweisender aber fundamentaler Satz.

3.5 Satz. Seien $(M, d), (M', d')$ metrische Räume; seien $f_n : M \rightarrow M'$ stetig für $n \in \mathbb{N}, f : M \rightarrow M'$. Dann:

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} \implies f \text{ stetig.}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0, x \in M$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{y \in M} d'(f_n(y), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geq n_0) \quad (*)$$

Nach Voraussetzung ist f_{n_0} stetig; also existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall y \in M, d(x, y) \leq \delta : d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$$

Für $d(x, y) \leq \delta$ folgt:

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &\leq d'(f(x), f_{n_0}(x)) + d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d'(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\stackrel{(*), (**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

□

Zurück nach \mathbb{R} :

3.6 Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n \rightarrow f$ punktweise und $f'_n \rightarrow g$ gleichmäßig $\implies f$ ist stetig differenzierbar und $f' = g$.

„Unter geeigneten Voraussetzungen“ ist hier:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

Beweis. Es gilt für $x_0 \in I$:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f_n'(t) dt$$

$$\downarrow \text{pktw. konv.} \quad \downarrow \quad \downarrow \text{Satz 3.3}$$

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

$\stackrel{HDI}{\implies}$ f ist Stammfunktion von g ; g ist als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig \square

3.7 Definition. Sei $M \neq \emptyset$, $\mathcal{B}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{C} : f(M) \text{ beschränkt}\}$. Definiere, für $f \in \mathcal{B}(M)$,

$$\|f\|_M = \|f\|_{\infty, M} := \sup_{x \in M} |f(x)| < \infty.$$

Bemerkung. $\mathcal{B}(M)$ ist ein (∞ -dimensionaler) Vektorraum und $\|\cdot\|_M$ ist **eine Norm** auf $\mathcal{B}(M)$, d.h.

- (1) $\|0\|_M = 0$ und $\|f\|_M > 0$ für $f \in \mathcal{B}(M) \setminus \{0\}$.
- (2) $\|f + g\|_M \leq \|f\|_M + \|g\|_M$, ($f, g \in \mathcal{B}(M)$)
- (3) $\|\lambda f\|_M = |\lambda| \cdot \|f\|_M$, ($f \in \mathcal{B}(M), \lambda \in \mathbb{C}$)

Beweis. Übung. \square

3.8 Satz (Konvergenzkriterium von Weierstraß). Sei $M \neq \emptyset$, $f_n \in \mathcal{B}(M)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_M < \infty$. Dann ist $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ für alle $x \in M$ absolut konvergent und für $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \rightarrow F \text{ gleichmäßig für } n \rightarrow \infty.$$

Bemerkung. Durch $d_{\infty}(f, g) := \|f - g\|_M$ wird eine Metrik auf $\mathcal{B}(M)$ definiert.

3.9 Beispiel. $M = (a, a)$, $a > 0$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow \|f_n\|_M = \sup_{|x| < a} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{a^n}{n!}$$

Satz 3.8 liefert: $\forall x \in (-a, a)$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ und die Polynome $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow \exp(x)$ gleichmäßig für $x \in (-a, a)$. Durch Ableiten der linken Seite und Satz 3.6:

$$\exp' = \exp.$$

Beweis. [von Satz 3.8] Haben absolute Konvergenz für $x \in M$ nach dem Majorantenkriterium: $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_M$. Für $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - F(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_M \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

3.2 Potenzreihen

Mit Hilfe von Potenzreihen werden wichtige Funktionen beschrieben. Als Beispiele haben wir schon die Exponentialfunktion kennengelernt. Praktischerweise arbeitet man in \mathbb{C} .

3.10 Definition. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

heißt **Potenzreihe**; dabei ist $z_0 \in \mathbb{C}$ der **Entwicklungspunkt**, (a_n) die Folge der Koeffizienten, $a_n \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ eine Variable.

Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n =: f(z),$$

und welche Eigenschaften besitzt f ?

Idee: f ist ein Polynom vom Grad ∞ .

3.11 Satz. Sei $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe.

(1) Sei $R := \sum \{ |z - z_0| : \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n \text{ konvergent} \} \subset [0, \infty]$, der **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Dann gilt:

a) Für $|z - z_0| > R$ divergiert $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$.

b) Für $|z - z_0| < R$ konvergiert $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$.

(2) Seien $f_n : U_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k, \quad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

Dann ist $f_n \rightarrow f$ punktweise und für $\forall z \in U_R(z_0)$ gilt $\{z : |z - z_0| < R\}$

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig auf } U_r(z_0) = \overline{B_r(z_0)} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$



Beweis. (1) Ist $R = 0$, so konvergiert $\sum a_n(z - z_0)^n$ nur für $z = z_0$; damit sind (a), (b) erfüllt und die Aussage von (b) auch klar.

Also sei ohne Einschränkung $R > 0$: Sei $r > R$. Nach Definition von R gibt es $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $r < |z_1| \leq R$ so, dass $\sum_{n \geq 0} a_n(z_1 - z_0)^n$ konvergiert. Wir zeigen nun die absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf $B_r(z_0)$.

Setze

$$s := \sup_n |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < \infty$$

$$g_n(z) := a_n(z - z_0)^n \text{ für } z \in B_r(z_0) =: M$$

Dann ist

$$|g_n(z)| = |a_n| \cdot |z - z_0|^n$$

$$= |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n = \dots \leq s \cdot \left(\frac{r}{|z_1 - z_0|} \right)^n$$

Es ist

$$\frac{r}{|z_1 - z_0|} =: q < 1 \text{ und } \|g_n\|_M \leq s \cdot q^n$$

$$\text{geom. R.} \implies \sum_{n \geq 0} \|g_n\|_M < \infty$$

$$\text{Satz 3.8} \implies \text{gleichmäßige Konvergenz von } f_n(z) = \sum_{k=0}^n g_k(z) \rightarrow f(z).$$

Da $r < R$ beliebig, folgt die Konvergenz auf $U_R(z_0)$. Bleibt (b) von (1) zu zeigen. Keine Konvergenz für $|z - z_0| > R$ ist klar, sonst Widerspruch zu Supremum. \square

Bemerkung. Im Beweis von Satz 3.11:

$$R = \sup\{|z - z_0| : (a_n(z - z_0)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}$$

3.12 Beispiel. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot z^n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot z^n$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n$,

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot z^n$, (5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} \cdot z^n$, (6) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \cdot 42^{-n^2}$

3.13 Satz. Sei $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann hat auch die formal differgente Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z - z_0)^{n-1}$$

den Konvergenzradius R .

Beweis. Sei R' der Konvergenzradius der formal differgenten Potenzreihe $\Rightarrow R' \leq R$, denn $(n \cdot a_n(z - z_0)^{n-1})_n$ beschränkt $\Rightarrow (a_n(z - z_0)^n)_n$ beschränkt. Sei andererseits $0 < r < R$; dann existiert $r' > r$ mit

$$\begin{aligned} M &:= \sup_n |a_n| \cdot (r')^n < \infty. \\ \Rightarrow (n+1)|a_{n+1}| \cdot r^n &\leq |a_{n+1}| \cdot (r')^n \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^n \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{r'} |a_{n+1}| \cdot (r')^{n+1}}_{\leq \frac{M}{r'}} \cdot \underbrace{(n+1) \left(\frac{r}{r'}\right)^n}_{\rightarrow 0} \\ \Rightarrow R' &> r \end{aligned}$$

□

3.14 Korollar. Seien (a_n) , x_0 reell, $\sum_{n \geq 0} a_n(z - x_0)^n =: f(z)$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Für die Einschränkung $g := f|_{(x_0-R, x_0+R)}$ gilt:

$$\begin{aligned} g \in C^\infty(x_0-R, x_0+R), \quad g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1} \text{ und} \\ g^{(n)}(x_0) &= n! \cdot a_n. \end{aligned}$$

Beweis. Es genügt zu zeigen $g \in C^1$ und $g'(x) = \dots$. Der Rest gilt durch Induktion. Setzen wieder

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z - x_0)^k, \quad g_n := f_n|_{(x_0-R, x_0+R)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sei $r < R$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{3.11} \quad g_n &\rightarrow g \text{ gleichmäßig auf } (x_0 - r, x_0 + r) \\ \xrightarrow{3.11, 3.13} \quad g'_n(x) &= \sum_{k=1}^n k \cdot a_k(x - x_0)^{k-1} \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k(x - x_0)^{k-1}}_{=: h(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } & g_n \xrightarrow{\text{glm}} g \text{ auf } (x_0 - r, x_0 + r) \\ & g'_n \xrightarrow{\text{glm}} h \text{ auf } (x_0 - r, x_0 + r) \\ \xrightarrow{3.6} & g \text{ differenzierbar und } g' = h. \end{aligned}$$

Beweisende, da $r < R$ beliebig. □

3.15 Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **analytisch**, wenn es zu jedem $z_0 \in U$ eine Koeffizientenfolge (a_n) gibt, so dass $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ den Konvergenzradius

$R > 0$ besitzt und

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n \text{ für } |z - z_0| < R.$$

Ist $V \subset \mathbb{R}$ offen und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, so heißt f **reell analytisch**.

Bemerkung. Haben gezeigt: f reell analytisch $\Rightarrow f \in C^\infty$.

4 Funktionen mehrerer Veränderlicher

4.1 Stetige Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n

Wir beginnen mit einigen Beispielen

4.1 Beispiel. (1) Die Bewegung eines Massenpunkts im Raum wird gegeben durch eine Abbildung

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \underbrace{t}_{\text{Zeit}} \mapsto \underbrace{x(t)}_{\text{Ort}}$$

(2) Den Temperaturverlauf im Raum kann man beschreiben durch

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto T(x) \quad (\text{Temperatur bei } x)$$

(3) Will man bei (2) eine zeitliche Veränderung berücksichtigen, so betrachtet man

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \underbrace{(t, x)}_{\text{Zeit Ort}} \mapsto T(t, x)$$

(4) Ein Kraftfeld im Raum ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto F(x)$$

Zeitlich veränderlich:

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, x) \mapsto F(t, x).$$

In vielen Fällen sind Funktionen auf $A \subset \mathbb{R}^m$ gegeben. Mit der euklidischen Metrik sind Begriffe wie Stetigkeit, Konvergenz,... definiert.

Der folgende Satz ist leicht zu zeigen, verwendet man Lemma 3.6 ??? aus Analysis I und Satz 3.10 ??? aus Analysis I.

4.2 Satz. Sei $A \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, definiert durch $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Sei $x_0 \in A$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig [in } x_0] \iff \forall i = 1, \dots, n : f_i \text{ stetig [in } x_0]$$

Damit ist die Stetigkeit vektorwertiger Funktionen auf die Stetigkeit reellwertiger Funktionen zurückgeführt.

Analog kann man auf $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen mit reellem Argument „basteln“, die **partiellen Funktionen**.

Sei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (die 1 an der i -ten Stelle) der i -te Einheitsvektor, $i = 1, \dots, m$, im \mathbb{R}^m . Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, $x \in A$, so setze

$$f_{i,x} : \{t \in \mathbb{R} : te_i + x \in A\} \rightarrow \mathbb{R}^n, f_{i,x}(t) = f(t \cdot e_i + x),$$

die **i -te partielle Funktion**.

Allgemeiner, für $e \in \mathbb{R}^m$, $\|e\| = 1$:

$$f_{e,x} : \{t \in \mathbb{R} : t \cdot e + x \in A\} \rightarrow \mathbb{R}^n, f_{e,x}(t) = f(t \cdot e + x)$$

Konvention: ($t \mapsto f(x+t \cdot e)$) wird geschrieben als $f(x+\cdot e)$. Dabei steht „ \cdot “ anstelle der Variablen.

4.3 Definition. Sind alle $f_{i,x}, i = 1, \dots, m$ [bei 0] stetig, so heißt f [bei x_0] **partiell stetig**.

Sind alle $f_{e,x}, \|e\| = 1$, [bei 0] stetig, so heißt f [bei x] **richtungsstetig**.

4.4 Satz. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in A \subset \mathbb{R}^m$.

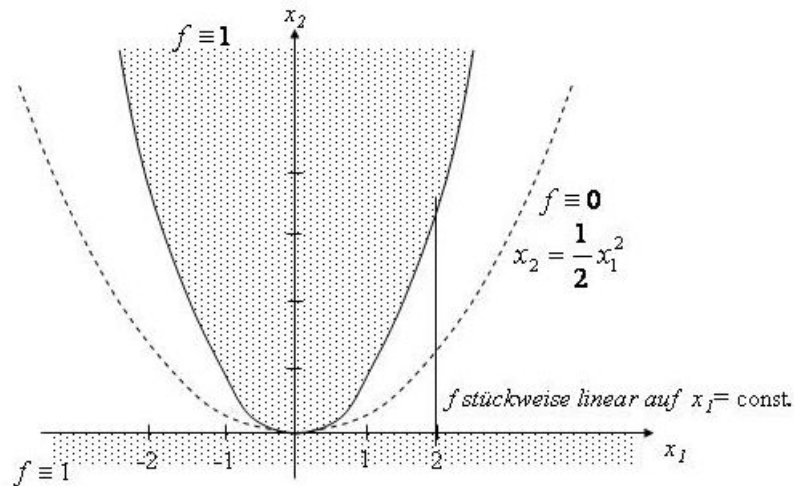
$$f \text{ stetig [in } x_0] \begin{matrix} \implies \\ \not\Leftarrow \end{matrix} f \text{ richtungsstetig [in } x_0] \begin{matrix} \implies \\ \not\Leftarrow \end{matrix} f \text{ partiell stetig [in } x_0]$$

Zum ersten $\not\Leftarrow$ folgendes Beispiel:

4.5 Beispiel (Richtungsstetig aber nicht stetig). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x_2 \leq 0 \text{ oder } x_2 \geq x_1^2 \\ 1 - \frac{2x_2}{x_1^2} & , \text{ falls } 0 < x_2 < \frac{1}{2}x_1^2 \\ 1 - 2\frac{x_1^2 - x_2}{x_1^2} & , \text{ falls } \frac{1}{2}x_1^2 < x_2 \leq x_1^2. \end{cases}$$

Diese Funktion ist richtungsstetig in \mathbb{R}^2 , unstetig in $(0, 0)$.



f ist richtungsstetig in 0, denn für jedes $e \in \mathbb{R}^m$, $\|e\| = 1$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $f(te) \equiv 1$ für $|t| < \varepsilon$.

f ist nichtstetig bei 0, denn $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}) \rightarrow 0$ und $f(x_k) = 0 \not\rightarrow 1 = f(0)$.

4.6 Definition. Die Punkte $x \in \bar{A}$ werden auch **Berührungspunkte** von A genannt. Sei $A \subset \mathbb{R}^m$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \bar{A}$. Dann heißt $y \in \mathbb{R}^n$ **Grenzwert von f bei x_0** , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A: \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ bzw. } y = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x).$$

Anhand der Definitionen macht man sich leicht folgende Äquivalenz klar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y &\iff \{\forall (x_k) \in A, x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow y\} \\ &\iff \begin{cases} \tilde{f}: A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A \setminus \{x_0\} \\ y, & \text{falls } x = x_0 \end{cases} \\ \text{ist stetig bei } x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Merke: Selbst wenn f bei x_0 definiert ist, muss der Grenzwert von f bei x_0 nicht existieren; nämlich, wenn f bei x_0 nicht stetig ist.

4.7 Beispiel. (1) $f: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) := \frac{x}{\|x\|}$ hat bei 0 keinen Grenzwert.

(2) Für $f: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{|x|^2}\right)$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Wir erinnern daran, dass stetige Funktionen auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^m gleichmäßig stetig sind.

Eine wichtige Klasse stetiger Funktionen sind die **linearen Funktionen** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Es ist $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, falls $L(x + y) = L(x) + L(y)$, ($x, y \in \mathbb{R}^m$) und $L(\lambda x) = \lambda L(x)$, ($\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$)

Zu $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ gibt es bekanntlich eine Matrix

$$(L_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \quad \text{mit } L_{ij} = (Le_j | e_i).$$

Äquivalent dazu ist

$$Lx = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & \dots & L_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m L_{ij} x_j \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m L_{ij} x_j \end{pmatrix}_{i=1, \dots, n}$$

Man sieht leicht

$$|Lx| = \underbrace{\{m\sqrt{n} \cdot \max_{i,j} |L_{ij}|\}}_{=:c} \cdot \|x\|.$$

Insbesondere ist

$$|Lx - Ly| \leq c \cdot |x - y|,$$

L ist als **Lipschitz-stetig**.

4.8 Lemma. Sei $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert

$$\begin{aligned} \|L\| &= \max\{|Lx| : x \in \mathbb{R}^m, |x| \leq 1\} \\ &= \inf\{c : |Lx| \leq c \cdot |x|, (x \in \mathbb{R}^m)\}, \end{aligned}$$

und $\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ definiert eine **Norm** auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$; **Operatornorm**, **Matrix-Norm**.

4.2 Differentiation von Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n

Wir wissen:

$$1 - \dim f \text{ ist differenzierbar} \iff f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varphi(x)$$

mit

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_0} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad (\text{linear approximierbar})$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann heißt f in x_0 (**total**) **differenzierbar**, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\varphi = \varphi_{x_0} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \quad (\star)$$

und

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad (\star\star)$$

Weil $\varphi_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - L \cdot (x - x_0)$ durch (\star) festgelegt ist, ist die äquivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt } L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \text{ mit} \\ \frac{1}{|x - x_0|} \{f(x) - f(x_0) - L \cdot (x - x_0)\} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \end{array} \right.$$

Die Abbildung L wird **Ableitung** von f in x_0 genannt. Sie ist eindeutig, wie der folgende Satz zeigt. Wir schreiben

$$Df(x_0) := df(x_0) := f'(x_0) := L.$$

4.9 Satz. Sei f in x_0 differenzierbar und L entsprechend. Dann ist L eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $L_1, L_2, \varphi_1, \varphi_2$ wie in der Definition von differenzierbar gefordert, d.h.

$$f(x) = f(x_0) + L_i(x - x_0) + \varphi_i(x).$$

mit

$$\frac{\varphi_i(x)}{|x + x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

Dann folgt für $M := L_2 - L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Mx}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{M(x - x_0)}{|x - x_0|} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{L_2(x - x_0) - L_1(x - x_0)}{|x - x_0|} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{|x - x_0|} = 0 \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ folgt

$$\begin{aligned} Mx &= |x| \cdot \frac{M\left(\frac{x}{|x|}\right)}{\left|\frac{x}{|x|}\right|} \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow 0. \\ &\Rightarrow M \equiv 0 \\ &\Rightarrow L_1 = L_2 \end{aligned}$$

□

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, f heißt **differenzierbar**, wenn f für alle x_0 in x_0 differenzierbar ist.

4.10 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Dann gilt:

$$f \text{ differenzierbar [in } x_0] \Rightarrow f \text{ stetig [in } x_0].$$

Beweis. Sei f in x_0 differenzierbar.

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = L \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0$$

□

Für konkrete Berechnungen: „in Koordinaten rechnen“:

Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad f \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar.} \\ Df(x_0) &= (l_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f(x) - f(x_0) = (l_{ij})(x - x_0) + \varphi(x).$$

Davon die i -te Zeile:

$$f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{j=1}^m (l_{ij})(x_j - x_{0,j}) + \varphi(x)_i.$$

Für $x = x_0 + he_j$ gilt:

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0) &= \sum_{k=1}^m l_{ik}h \cdot \delta_{kj} + \varphi(he_j)_i \\ &= l_{ij} \cdot h + \varphi(he_j)_i \\ \Rightarrow l_{ij} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0)}{h} =: \partial_j f_i(x_0) =: \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \end{aligned}$$

Dabei ist die **partielle Ableitung** $\partial_j f_i$ die Ableitung der entsprechenden partiellen Funktion. wir haben gezeigt:

4.11 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 . Dann existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f_i(x_0), \quad j = 1, \dots, m,$$

für alle $f_i, i = 1, \dots, n$ in x_0 , und es gilt:

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m}} \quad \text{Jacobi-Matrix, Funktionalmatrix.}$$

4.12 Definition. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt [in x_0] **partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen [in x_0] existieren und **stetig partiell differenzierbar**, wenn zusätzlich alle $\partial_j f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Nach Satz 4.11 gilt

$$f \text{ differenzierbar [in } x_0] \Rightarrow f \text{ partiell differenzierbar [in } x_0].$$

\neq

Dazu

4.13 Beispiel. (1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{für } x = (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Offenbar ist f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar (damit auch total differenzierbar). Für $x_0 = 0 = (0, 0) : f(te_1) = f(te_2) = 0 \ (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow f$ partiell differenzierbar in 0 mit $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$. Wäre f differenzierbar in 0, so müßte $Df(0) = (0 \ 0)$ sein. Daraus würde folgen

$$\frac{1}{|x|} f(x) = \frac{1}{|x|} \left\{ \underbrace{f(x) - f(0)}_{=0} - \underbrace{Df(0) \cdot x}_{=0} \right\} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

4.2. DIFFERENTIATION VON FUNKTIONEN VON \mathbb{R}^M NACH \mathbb{R}^N 39

im Widerspruch zu $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $x_n \rightarrow 0$

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n} \quad \text{also} \quad \frac{f(x_n)}{|x_n|} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

(2) Sei $n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $n(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. n ist partiell differenzierbar für $x \neq 0$:

$$Dn(x) = \frac{x}{|x|} \text{ für } x \neq 0.$$

n ist in 0 nicht differenzierbar!

4.14 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f total differenzierbar.

Beweis. Sei $x_0 \in U$, $L := (\partial_i f_i(x_0)) \quad i = 1, \dots, n$. Wollen zeigen: $L = Df(x_0)$.
 $j = 1, \dots, m$

Dazu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in U, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{|x - x_0|} | \{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\} | \leq \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, dass für alle i, j :

$$|\partial_j f_i(x) - \delta_j f_i(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{m\sqrt{n}}, \text{ falls } |x - x_0| \leq \delta.$$

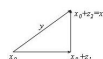
(Möglich, weil alle $\partial_j f_i$ stetig sind!)

Sei $|x - x_0| \leq \delta$ so klein, dass $B_\delta(x_0) \subset U$.

Setze $x - x_0 =: y$, $z_j := (y_1, \dots, y_j, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, m$; $z_0 := 0$.

Für $i = 1, \dots, n$ folgt

$$f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{j=1}^m f_i(x_0 + z_j) - f_i(x_0 + z_{j-1})$$



Nach dem 1-dimensionalen Mittelwertsatz existieren $\xi_{i,j} \in (0, y_j)$ mit

$$\begin{aligned} f(x_0 + z_j) - f(x_0 + z_{j-1}) &= f(x_0 + z_{j-1} + y_j \cdot e_j) - f(x_0 + z_{j-1} + 0 \cdot e_j) \\ &\stackrel{\text{MWS}}{=} y_j \cdot \partial_j f_i(x_0 + z_{j-1} + \xi_{i,j} \cdot e_j) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |f_i(x_0 + z_j) - f_i(x_0 + z_{j-1}) - y_j \cdot \partial_j f_i(x_0)| &\leq |y_j| \cdot \\ &\quad |\partial_j f_i(x_0 + z_{j-1} + \xi_{i,j} \cdot e_j) - \partial_j f_i(x_0)| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \varepsilon m \sqrt{n} \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|^2 &= \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x_0) - \sum_j \partial_j f_i(x_0) \cdot y_j|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sum_{i=1}^m (f_i(x_0 + z_j) - f_i(x_0 + z_{j-1}) - \partial_j f_i(x_0) \cdot y_j) \right|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |x - x_0| \frac{\varepsilon}{m\sqrt{n}} \right)^2 = \varepsilon^2 |x - x_0|^2 \\
 \Rightarrow \frac{1}{|x - x_0|} |f(x) - f(x_0) - L \cdot (x - x_0)|^2 &\leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

Wir betrachten zwei wichtige Spezialfälle:

$m = 1$: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ hat eine Ableitung der Form

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \dots \\ f'_n(x) \end{pmatrix},$$

natürlich falls f differenzierbar in x .

$m = 1$: Eine Funktion von m Variablen. Ist f differenzierbar, so ist

$$Df(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_m f(x))$$

und

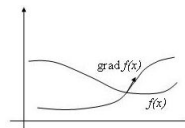
$$Df(x) \cdot y = \sum_{j=1}^m \partial_j f(x) y_j = (Df^T(x)|y);$$

der Spaltenvektor:

$$Df(x)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \dots \\ \partial_m f(x) \end{pmatrix} =: \nabla f(x) =: \text{grad} f(x),$$

heißt **Gradient** von f an der Stelle x .

Der Gradient hat eine wichtige geometrische Bedeutung: er zeigt in die Richtung, in der f am schnellsten wächst.



4.15 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 .

(1) Ist $\|e\| = 1$, so ist die Richtungsableitung von f in Richtung e gegeben durch

$$\partial_e f(x_0) = (\text{grad } f(x_0)|e).$$

(2) Ist $\nabla f(x_0) \neq 0$, so zeigt $\nabla f(x_0)$ in die Richtung e in der f am schnellsten wächst (mit dem größten $\partial_e f(x_0)$) und

$$|\text{grad } f(x_0)| = \partial_e f(x_0).$$

Beweis. Die Richtungsableitung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_e f(x_0) &= \left. \frac{d}{dt}(f(x_0) + te) \right|_{t=0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Wir nutzen aus, dass f differenzierbar ist und schreiben

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{f(x_0) + (\text{grad } f(x_0)|he) + \varphi(x_0 + he) - f(x_0)\} \\ &= (\text{grad } f(x_0)|e) + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + he)}{0}}_{=0} \end{aligned}$$

Damit ist (1) gezeigt.

Ist $\underbrace{\text{grad } f(x_0)}_{e_0} \neq 0$, so gilt

$$\partial_e f(x_0) = (\text{grad } f(x_0)|e) \stackrel{CS}{\leq} |\text{grad } f(x_0)| \cdot \underbrace{|e|}_{=1}$$

und für $e = \frac{e_0}{\|e_0\|}$ (in Richtung von $\text{grad } f(x_0)$):

$$\partial_e f(x_0) = \left(e_0 \left| \frac{e_0}{\|e_0\|} \right. \right) = |e_0| = |\text{grad } f(x_0)|,$$

was die restlichen Behauptungen von (2) zeigt. □

4.16 Beispiel. (1) Für $n(x) := |x|$ ist $\text{grad } n = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$.

(2) Für $g(x) = |x|^2$ ist $\text{grad } g(x) = 2x$.

Wir notieren die

Produktregel für Gradienten: $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x .

$$\implies \text{grad}(fg)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\nabla g(x)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\nabla f(x)}_{\in \mathbb{R}^m}.$$

Folgt aus der Produktregel für reelle Funktionen. wir betrachten nun eine weitere spezielle Klasse von Funktionen: **Vektorfelder**.

4.17 Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ist f differenzierbar, so definiert man die **Divergenz** von f durch

$$\text{div } f(x) = \sum_{j=1}^m \partial_j f_j(x) \in \mathbb{R}.$$

Mit dem „formalen Vektor“

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \dots \\ \partial_m \end{pmatrix} \quad \text{Nabla}$$

können wir zur Abkürzung schreiben

$$\begin{aligned} \text{grad } g(x) &= \nabla g(x) \quad (g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}) \\ \text{div } f(x) &= (\nabla |f|)(x) \quad (f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m) \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j f_j(x) \end{aligned}$$

Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, beide differenzierbar, so ist

$$\begin{aligned} \text{div}(fg)(x) &= \sum_{j=1}^m \partial_j (fg)_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j (f \cdot g_j)(x) \\ &= (\nabla f|g) + f \cdot \text{div } g \end{aligned}$$

4.18 Beispiel. (1) Für $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = x$ ist $\text{div } f(x) = m$

(2) Für $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ist

$$\begin{aligned} \text{div } f(x) &= \text{div} \left(\frac{1}{|x|} \cdot x \right) \\ &= \left(\text{grad} \frac{1}{|x|} \middle| x \right) + \frac{1}{|x|} \cdot \text{div } x \\ &= - \left(\frac{1}{|x|^3} x \middle| x \right) + \frac{m}{|x|} = \frac{m-1}{|x|} \end{aligned}$$

Weiss nicht, ob hier etwas fehlt.

4.19 Lemma. Seien $\varphi, \psi \in T[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(i) \int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$$

$$(ii) \int_a^b (\lambda\varphi)(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx$$

(Insbesondere ist $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x) dx$ linear!)

$$(iii) \varphi \geq 0 \implies \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$$

$$(iv) \left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx$$

Beweis. (i) Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine gemeinsame Unterteilung von φ und ψ . In (x_{i-1}, x_i) habe φ den Wert c_i , ψ den Wert d_i .

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx &= \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum d_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx \end{aligned}$$

□

Bemerkung. (ii) impliziert **Monotonie**: $\varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$.

($0 \leq \psi - \varphi \xrightarrow{(iii)} 0 \leq \int (\psi - \varphi)(x) dx = \int \psi - \int \varphi$)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Für $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ gilt $\int \varphi \leq \int \psi$.

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} \text{ „} \leq \text{“ } \left\{ \int_a^b \psi(x) dx \mid \psi \in T[a, b], f \leq \psi \right\}$$

Insbesondere existiert das **Unterintegral**

$$\underline{\int} f := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\}$$

und das Oberintegral

$$\overline{\int} f := \inf \left\{ \int_a^b f(x) dx \mid \psi \in \mathcal{T}[a, b], f \leq \psi \right\}$$

Es ist $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.

4.20 Beispiel. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases} \quad \underline{\int} f = 0 \neq \overline{\int} f = b - a$
 \implies nicht Riemannintegrierbar.

hier fehlt vlt. noch was?

4.3 Differentiationsregeln und Mittelwertsätze

Wir starten mit Rechenregeln, die wir in ähnlicher Form aus der eindimensionalen Theorie kennen. Da wir es nun mit Matrizen zu tun haben, müssen wir mit der Reihenfolge aufpassen!

4.21 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, sind $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 , $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt $af + bg$ ist in x_0 differenzierbar,

$$D(af + bg)(x_0) = a \cdot Df(x_0) + b \cdot Dg(x_0)$$

Beweis. langweilig und einfach. □

Als nächstes erwähnen wir die Produktregel. Hier ist ein Analogon zum 1-dimensionalen Fall nicht ohne weiteres zu formulieren. Für $f(x), g(x) \in \mathbb{R}^n$ macht $f(x) \cdot g(x)$ keinen Sinn!

4.22 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 . Dann ist $f \cdot g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$D(fg)(x_0)y = \underbrace{f(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{Dg(x_0) \cdot y}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{(Df(x_0)y)}_{\in \mathbb{R}} g(x_0).$$

Für die partiellen Ableitungen ergibt sich also

$$\partial_j(fg)(x_0) = f(x_0)\partial_j g(x_0) + \partial_j f(x_0)g(x_0)$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi_f(x) \\ g(x) &= g(x_0) + Dg(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi_g(x) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\varphi_f(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ und } \frac{\varphi_g(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\varphi_g(x) + Df(x_0)g(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + Df(x_0)(x - x_0)g(x - x_0) + Df(x_0)\varphi_g(x) + \varphi_f(x_0)g(x) \\ &= (fg)(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)g(x_0) + \varphi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi(x) := f(x_0)\varphi_g(x) + Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)\varphi_g(x) + \varphi_f(x)g(x)$$

Es ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|x - x_0|} \{Df(x_0)(x - x_0) \cdot Dg(x_0)(x - x_0)\} \\ &= |x - x_0| \underbrace{\left\{ Df(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot Dg(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right\}}_{\text{beschränkt durch } \|Df(x_0)\| \cdot \|Dg(x_0)\|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Und damit

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

□

4.23 Satz (Kettenregel). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 ; $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f(U) \subset V$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $f(x_0)$. Dann ist $h = g \circ f$ differenzierbar in x_0 , und es gilt:

$$\begin{aligned} Dh(x_0) &= Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbb{R}^p &\longleftarrow \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Achtung: Reihenfolge ist beim Produkt der Matrizen sehr wichtig.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = g(f(x_0) + \underbrace{Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)}_{=:y}) \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0)) \cdot y + \varphi_g(y) \\ &= h(x_0) + Dg(f(x_0))(Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x) + \varphi_g(y)) \\ &= h(x_0) + \underbrace{Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi(x) = Dg(f(x_0))\varphi_f(x) + \varphi_g(Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)).$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

Für den ersten Summanden folgt:

$$\frac{1}{|x - x_0|} Dg(f(x_0))\varphi_f(x) = Dg(f(x_0)) \cdot \underbrace{\frac{\varphi_f(x)}{|x - x_0|}}_{\rightarrow 0} \rightarrow Dg(f(x_0)) = 0$$

Für den zweiten Summanden gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - x_0|} \varphi_g(Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)) &= \frac{1}{|x - x_0|} \varphi_g(f(x)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x) = f(x_0) \\ \frac{\varphi_g(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} \cdot \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow x_0$ folgt $f(x) \rightarrow f(x_0)$, also

$$\frac{\varphi_g(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad (\star)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} &= \frac{1}{|x - x_0|} |\{Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)\}| \\ &\leq \underbrace{\left| Df(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right|}_{\leq \|Df(x_0)\|} + \underbrace{\frac{|\varphi_f(x)|}{|x - x_0|}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

$\implies \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$ beschränkt. Wegen (\star) folgt

$$\frac{1}{|x - x_0|} \varphi_g(f(x)) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0,$$

also ist φ wie gewünscht und h differenzierbar. \square

4.24 Korollar. Aus dem obigen Satz folgt für die partiellen Ableitungen

$$\partial_j h_i(x) = \sum_{k=1}^n \partial_k g_i(f(x)) \cdot \partial_j f_k(x)$$

Wir kommen nun zum zweiten Thema, das in der Kapitelüberschrift angekündigt war: Mittelwertsätze.

4.25 Satz ((Mittelwertsatz)). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $x, y \in U$ und $\{x + t \cdot (y - x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Dann existiert $\nu \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= Df(x + \nu(y - x))(y - x) \\ &= (\nabla f(x + \nu(y - x))|y - x) \end{aligned}$$

($x + \nu(y - x)$ liegt auf der Strecke zwischen x und y .)

Beweis. Betrachte $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(t) := x + t \cdot (y - x)$ und $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h := f \circ g \implies h$ stetig auf $[0, 1]$, differenzierbar auf $(0, 1)$ mit

$$h'(t) = Df(g(t))Dg(t) = (\nabla f(g(t))|y - x) \stackrel{1\text{-dim MWS}}{\implies} \text{Behauptung.}$$

□

4.26 Korollar. (1) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $|\partial_j f_i(x)| \leq M$ ($x \in U, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$). Dann gilt für alle $x, y \in U$ mit $\overline{xy} = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$.

$$|f(y) - f(x)| \leq m \cdot \sqrt{nm} \cdot |y - x|.$$

(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und zusammenhängend; sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant auf U :

(3) Unter den Voraussetzungen von (1) gibt es $\xi \in \overline{xy}$ mit $|f(y) - f(x)| \leq \|Df(\xi)\| \cdot |y - x|$.

Beweis. lassen wir weg; folgt einfach aus Satz 4.25. □

4.4 Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen; $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **zweimal stetig differenzierbar**, wenn f stetig differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls stetig differenzierbar sind. Entsprechend definiert man induktiv, dass f **p-mal stetig differenzierbar** ist, wenn alle p -ten partiellen Ableitungen

$$\partial_{j_1 \dots j_p} f_i, \quad j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, m\}$$

existieren und stetig sind. Dabei kommt es zwar zunächst auf die Reihenfolge der Ableitungen an, nicht aber wenn Stetigkeit im Spiel ist.

4.27 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f_k = \partial_j \partial_i f_k \text{ für } i, j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n.$$

Beweis. Betrachten $n = 1$, d.h. lassen k weg. Durch „Umordnen“ der Koordinaten $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zu zeigen ist $\partial_2 \partial_1 f(0) = \partial_1 \partial_2 f(0)$. Da U offen, existiert $r > 0$ mit $U_r(0) \subset U$. Die folgenden Überlegungen sind für $r^2 > s^2 + t^2$ durchführbar; für diese gilt

$$f(s, t) - f(s, 0) - f(0, t) + f(0, 0) = (f(s, t) - f(s, 0)) - (f(0, t) - f(0, 0))$$

mit $g(x) := f(x, t) - f(x, 0)$

$$\begin{aligned} &= g(s) - g(0) \\ &\stackrel{MWS}{=} g'(s_1)(s - 0) \text{ mit } s_1 \in (0, s). \\ &\stackrel{\text{Def. von } g, \partial_1 f}{=} (\partial_1 f(s_1, t) - \partial_1 f(s_1, 0)) \cdot s \\ &\stackrel{h(x) := \partial_1 f(s_1, x)}{=} (h(t) - h(0)) \cdot s \\ &\stackrel{MWS, t_1 \in (0, t)}{=} h'(t_1) \cdot t \cdot s \\ &= \partial_2 \partial_1 f(s_1, t_1) \cdot t \cdot s. \end{aligned}$$

Völlig analog

$$f(s, t) - f(s, 0) - f(0, t) + f(0, 0) = (f(s, t) - f(0, t)) - (f(s, 0) - f(0, 0)) = s \cdot t \cdot \partial_1 \partial_2 f(s_2, t_2)$$

mit $s_2 \in (0, s)$, $t \in (0, t)$. Für $s \neq 0$, $t \neq 0$ folgt

$$\partial_2 \partial_1 f(s_1, t_1) = \partial_1 \partial_2 f(s_2, t_2).$$

Für $s, t \rightarrow 0$ folgt $s_1(s), s_2(s), t_1(t), t_2(t) \rightarrow 0$ und damit

$$\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \partial_1 \partial_2 f(0, 0).$$

□

4.28 Korollar. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ p -mal stetig differenzierbar. Dann können in

$$\partial_{j_1 \dots j_p} f$$

die partiellen Ableitungen beliebig vertauscht werden.

Beweis. Induktion mit Satz 4.27

□

Für $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $p \in \mathbb{N}$ sei

$$C^p(U, \mathbb{R}^n) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ } p\text{-mal stetig differenzierbar}\} \text{ ist ein Vektorraum.}$$

Für $f \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$, $q \in \mathbb{N}$, $q \leq p$, $j = 1, \dots, m$. Setze

$$\partial_j^q f := \underbrace{\partial_j \dots \partial_j}_q f, \quad \partial_j^0 f = f$$

Für $(j_1, \dots, j_q) \in \{1, \dots, m\}^q$ und $i \in \{1, \dots, m\}$ bezeichne α_i die Anzahl der k mit $j_k = i$. Dann gilt

$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_q} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m} f.$$

Für **Multi-Indizes** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ sei im folgenden

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \sum_{j=1}^m \alpha_j \text{ die \textbf{Länge} von } \alpha, \\ \alpha! &:= \prod_{j=1}^m \alpha_j! \text{ die \textbf{Fakultät} von } \alpha, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}, \text{ für } x \in \mathbb{R}^m, \\ \partial^\alpha f(x) &:= \partial_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial_m^{\alpha_m} f(x), \text{ für } f \in C^p(U, \mathbb{R}^n), |\alpha| \leq p. \end{aligned}$$

Damit können wir den Taylorschen Satz in eine elegante mehrdimensionale Form bringen.

4.29 Satz (von Taylor). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{p+1}(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$. Dann gilt für alle $x \in U$, für die $\bar{x}_0 \bar{x} \subset U$ liegt

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha + R_p(x),$$

mit

$$R_p(x) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu(x - x_0)) (x - x_0)^\alpha$$

für ein geeignetes $\nu \in (0, 1)$.

Zur Verdeutlichung geben wir dieses Resultat für $p = 0, 1, 2$ explizit an:

$p = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (\text{grad } f(x_0 + \nu(x - x_0)) | x - x_0) \\ &= f(x_0) + \sum_j \partial_j f(x_0 + \nu(x - x_0)) \cdot (x_j - x_{0,j}) \end{aligned}$$

$p = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (\text{grad } f(x_0) | x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \partial_j \partial_k f(x_0 + \nu(x - x_0)) (x_j - x_{0,j}) \cdot (x_k - x_{0,k}) \\ &= f(x_0) + (\text{grad } f(x_0) | x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (Hf(x_0 + \nu(x - x_0)) (x - x_0) | x - x_0) \\ &\quad \text{mit } Hf(\cdot) = (\partial_j \partial_k f(\cdot))_{i,k=1, \dots, m} \text{ Hesse-Matrix.} \end{aligned}$$

$p = 2$:

$$f(x) = f(x_0) + (\text{grad } f(x_0)|x - x_0) + \frac{1}{2}(Hf(x_0)(x - x_0)|x - x_0) + R_2$$

Beweis. Wir führen die Aussage auf den 1-dimensionalen Fall zurück. Setze $y = (y_1, \dots, y_m) := x - x_0$, $h(t) := x_0 + ty$, $g: [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := f(x_0 + ty) = f \circ h(t)$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, daß

$$\{x_0 + ty : -\varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon\} \subset U.$$

Dann: g ist stetig differenzierbar,

$$\begin{aligned} g'(t) &= Dg(t) = Df(h(t)) \cdot Dh(t) && \text{Kettenregel} \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j f(h(t)) \underbrace{\frac{d}{dt} h_j(t)}_{=y_j} \\ &= \sum_{j=1}^m y_j \partial_j f(x_0 + ty) \end{aligned}$$

Ist $p \geq 1$, so ist auch g' stetig differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} g''(t) &= Dg'(t) = \sum_{j=1}^m y_j \frac{d}{dt} \partial_j f(x_0 + ty) \\ &\stackrel{\text{wie oben}}{=} \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^m y_i \partial_i \partial_j f(x_0 + ty) \\ &\stackrel{\text{formal}}{=} \left(\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \right)^2 f(x_0 + ty) \end{aligned}$$

Durch Induktion, für $k \leq p + 1$,

$$g^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \right)^k f(x_0 + ty)$$

Polinomischer Satz:

Für $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\sum_{j=1}^m \right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} z^\alpha.$$

4.5. LOKALE EXTREMA DIFFERENZIERBARER FUNKTIONEN 51

Wir können hier z_1, \dots, z_m durch $y_1 \partial_1, \dots, y_m \partial_m$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} g^{(k)}(t) &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \right)^k f(x_0 + ty) \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{(y_1 \partial_1, \dots, y_m \partial_m)^\alpha}{\alpha!} \right) f(x_0 + ty) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + ty) \end{aligned}$$

Die Taylorsche Formel für g liefert für $t \in [0, 1]$

$$g(t) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) t^k + \tilde{R}_p(t)$$

mit

$$\tilde{R}_p(t) = \frac{1}{(p+1)!} t^p g^{(p)}(\nu t) \text{ mit } 0 < \nu < 1.$$

Damit:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(1) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \tilde{R}_p(1) \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^m (x_j - x_{0,j}) \partial_j \right)^k f(x_0) + \tilde{R}_p(1) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \partial^\alpha f(x_0) + \tilde{R}_p(1) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha + R_p(x) \\ \text{mit } R_p(x) &= \tilde{R}_p(1) = \frac{1}{(p+1)!} g^{(p+1)}(\nu) \\ &= \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu y) \end{aligned}$$

□

4.5 Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$.

4.30 Definition. Man sagt, f hat in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), wenn ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\| < \delta.$$

f hat in x_0 ein strenges lokales Maximum (Minimum), wenn ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\| < \delta.$$

4.31 Satz (Notwendige Bedingung für Extrema). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$ und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar im Punkt x_0 . Hat f in x_0 ein lokales Maximum (lokales Minimum), so gilt $Df(x_0) = 0$ (grad $f(x_0) = 0$, $\partial_j f(x_0) = 0$, $j = 1, \dots, m$)

Beweis. Mit f ist auch

$$g_j : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_j(t) = f(x_0 + te_j)$$

bei $t = 0$ differenzierbar und hat dort ein lokales Extremum.

$$\stackrel{\text{Analysis I}}{\implies} 0 = g'_j(0) = \partial_j f(x_0)$$

gilt für alle $j = 1, \dots, m$. □

Bevor wir zum hinreichenden Kriterium kommen, noch eine Begriffsbildung aus der linearen Algebra:

4.32 Definition. Eine $m \times m$ -Matrix A heißt **positiv definit** (**positiv semidefinit**), falls $(Ax|x) > 0$ ($(Ax|x) \geq 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^m$. A heißt **negativ definit** (**negativ semidefinit**), falls $(Ax|x) < 0$ ($(Ax|x) \leq 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^m$.

4.33 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$.

a) *Notwendig:* Hat f bei x_0 ein lokales Maximum (Minimum), so gilt $Df(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $Hf(x_0)$ ist negativ semidefinit (positiv semidefinit).

b) *Hinreichend:* Ist $Df(x_0) = 0$ und $Hf(x_0)$ negativ definit (positiv definit), so hat f bei x_0 ein strenges lokales Maximum (strenges lokales Minimum).

Beweis. a) $Df(x_0) = 0$ nach 4.31.

Angenommen $Hf(x_0)$ ist nicht negativ semidefinit. Dann existiert $y \in \mathbb{R}^m$, $\|y\| = 1$ mit

$$(Hf(x_0)y|y) > 0.$$

Da f 2-mal stetig differenzierbar ist, existiert $\delta > 0$ so, dass

$$(Hf(x_0)y|y) > 0 \quad \text{für alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\| < \delta.$$

4.5. LOKALE EXTREMA DIFFERENZIERBARER FUNKTIONEN 53

Satz von Taylor liefert, für $t \in (0, \delta]$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + ty) &= f(x_0) + 0 + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu ty) t^{|\alpha|} y^\alpha \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m t^2 \partial_i \partial_j f(x_0 + \nu ty) t^{|\alpha|} y_i y_j \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{(Hf(x_0 + \nu ty) y|y)}_{\in U_\delta(x_0)} > f(x_0) \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

b) Sei $Df(x_0) = 0$ und $Hf(x_0)$ negativ definit \Rightarrow für alle $y \in \mathbb{R}^m, \|y\| = 1$:
 $(Hf(x_0)y|y) < 0$.

Die Einheitskugel $\{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| = 1\}$ ist kompakt, und $y \mapsto (Hf(x_0)y|y)$ ist stetig,
 nimmt also dort ihr Maximum an \Rightarrow Es existiert $\lambda > 0$ mit

$$(Hf(x_0)y|y) \leq -\lambda \quad (\|y\| = 1)$$

Da alle $\partial_i \partial_j f(\cdot)$ stetig sind, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\partial_i \partial_j f(x) - \partial_i \partial_j f(x_0)| \leq \frac{\lambda}{2m^2} \quad \text{für } \|x - x_0\| < \delta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (Hf(x)y|y) &= \sum_{i,j} \partial_i \partial_j f(x_0) y_i y_j + \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j f(x) - \partial_i \partial_j f(x_0)) y_i y_j \\ &\leq -\lambda + m^2 \frac{\lambda}{2m^2} \leq \frac{-\lambda}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \|x - x_0\| < \delta \quad \forall y \neq 0 : (Hf(x)y|y) < 0$.

Mit Taylor für $p = 1$ gilt für $\|x - x_0\| < \delta$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + 0 + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu(x - x_0)) (x - x_0)^\alpha \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \underbrace{(Hf(x_0 + \nu(x - x_0))(x - x_0)|x - x_0)}_{< 0} \end{aligned}$$

$f(x) < f(x_0)$. □

4.34 Beispiel. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 + y^4 - 4c^2 xy$ (mit $c > 0$)

Gesucht sind lokale Extrema von f .

1.Schritt: Ableitungen bestimmen!

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= 4x^3 - 4c^2 y; & \partial_2 f(x, y) &= 4y^3 - 4c^2 x; \\ \partial_1^2 f(x, y) &= 12x^2; & \partial_2^2 f(x, y) &= 12y^2; \end{aligned}$$

$$\partial_1 \partial_2 f(x, y) = \partial_2 \partial_1 f(x, y) = -4c^2.$$

Lokales Extremum:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_1 f = \partial_2 f &= 0 \\ 4x^3 - 4c^2 y &= 0 = \partial_1 f \\ 4y^3 - 4c^2 x &= 0 = \partial_2 f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \{(0, 0), \pm(c, c)\}$$

2.Schritt: Hesse-Matrix

(a) $(x, y) = (0, 0)$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(0, 0) & \partial_1 \partial_2 f(0, 0) \\ \partial_1 \partial_2 f(0, 0) & \partial_2^2 f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4c^2 \\ -4c^2 & 0 \end{pmatrix} = -4c^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(-4c^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = -4c^2 \left(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \right) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = -8c^2 xy$$

$\Rightarrow \left(Hf(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ hat kein bestimmtes Vorzeichen für alle (x, y) .

$\Rightarrow Hf(0, 0)$ ist nicht semidefinit.

\Rightarrow kein lokales Extremum bei $(0, 0)$.

(b) $(x, y) = \pm(c, c)$

$$Hf(\pm(c, c)) = \begin{pmatrix} 12c^2 & -4c^2 \\ -4c^2 & 12c^2 \end{pmatrix} = 4c^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4c^2 \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= 3x^2 - 2xy + 3y^2 \\ &= x^2 + y^2 + (x - y)^2 > 0 \text{ für } (x, y) \neq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Bei $\pm(c, c)$ liegen strenge lokale Minima vor.