

# TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Skript<sup>1</sup> zur Vorlesung

## ANALYSIS I

Prof. Stollmann

WS 2003/2004

## FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

---

<sup>1</sup>basierend auf der Vorarbeit von Nicole Amecke, Andreas Amrell, Jörg Brabandt, Svend Domdey, Ralf Hambach, Katja Mayer, Stefan Pauliuk, Robert Peters, Romy Radünz, Jana Schaarschmidt, Andre Schleife, Martin Tautenhahn, Stephan Wolf und Anke Freitag Version vom 28. Januar 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die natürlichen Zahlen</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Die reellen Zahlen</b>	<b>4</b>
2.1	Motivation und Geschichtliches . . . . .	4
2.2	Der Körper der reellen Zahlen . . . . .	5
2.3	Anordnung von $\mathbb{R}$ . . . . .	6
2.4	Intervallschachtelung und Folgen . . . . .	10
2.5	Rechnen mit Folgen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Metrische Räume</b>	<b>18</b>
3.1	Definition und Beispiele . . . . .	18
3.2	Offene Mengen, Umgebungen und Stetigkeit . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Reihen</b>	<b>27</b>
4.1	Reihen: Definition und einige Eigenschaften . . . . .	27
4.2	Konvergenzkriterien . . . . .	31
4.3	Die realen Zahlen: Dezimalbrüche . . . . .	33
4.4	Manipulation von Reihen . . . . .	35
4.5	Die Exponentialfunktion . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Stetige reelle Funktionen</b>	<b>44</b>
5.1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	44
5.2	Der Zwischenwertsatz . . . . .	46
5.3	Kompaktheit . . . . .	48
5.4	Umkehrfunktionen, Stetigkeit und allgemeine Potenzen . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Differentiation</b>	<b>53</b>
6.1	Differenzierbarkeit: Definition und erste Eigenschaften . . . . .	53
6.2	Lineare Approximation und Tangenten . . . . .	55
6.3	Ableitung der Umkehrfunktion und Kettenregel . . . . .	57
6.4	Höhere Ableitungen und partielle Ableitungen . . . . .	58
6.5	Lokale Extrema, Mittelwertsatz und Satz von Rolle . . . . .	59

---

<b>7</b>	<b>Integration</b>	<b>63</b>
7.1	Das Riemann-Integral . . . . .	63
7.2	Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“ . . . . .	69
7.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	72

# 1 Die natürlichen Zahlen

in Vorbereitung

## 2 Die reellen Zahlen

### 2.1 Motivation und Geschichtliches

Nicht alle Längenverhältnisse sind rational. Der „goldene Schnitt“ taucht im Pentagon (dem Symbol der Pythagoräer) auf.



$$\frac{l}{k} = \frac{l+k}{l}$$

#### 2.1.1 Beispiel.

- (1) Verhältnis der Diagonalenlänge zur Seitenlänge eines Quadrates ( $\sqrt{2}$ )
- (2) Verhältnis der Diagonalenlänge zur Seitenlänge eines Fünfeckes ( $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ )

*Beweis.* zu (2) (indirekt)

Angenommen  $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  wäre eine rationale Zahl. Dann muss auch  $\sqrt{5} = 2l - 1$  rational sein:

$$\exists p, q \in \mathbb{N}, \quad \text{ggT}(p, q) = 1 : \quad \sqrt{5} = \frac{p}{q}. \quad (2.1)$$

Damit gilt

$$5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{p^2}{q^2}, \quad (2.2)$$

d.h. 5 ist ein Teiler von  $p^2$ . Da 5 eine *Primzahl* ist, muss sie auch ein Teiler von  $p$  selbst sein, also:

$$5 \mid p^2 \Rightarrow 5 \mid p \Rightarrow 5^2 \mid p^2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : p^2 = k \cdot 25. \quad (2.3)$$

Mit Gleichung (2.2) erhält man für  $q$ :

$$5 \cdot q^2 = p^2 \Rightarrow q^2 = k \cdot 5 \Leftrightarrow 5 \mid q^2$$

und analog zu (2.3) folgt, dass auch  $q$  durch 5 teilbar ist, also ist  $\text{ggT}(p, q) = 5$ .

Dies steht im Widerspruch zur Annahme (2.1). □

#### Motivation für reelle Zahlen

Erweitere  $\mathbb{Q}$  so, dass Grenzwerte möglich sind.

**Entscheidende Strukturen**

- Arithmetik (Körperaxiome)
- Ordnungsstruktur
- Vollständigkeit

**2.2 Der Körper der reellen Zahlen**

Wir beginnen mit den Rechenregeln für reelle Zahlen.

**2.2.1 Definition.** Eine Menge  $(K, +, \cdot)$  für die die zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + & : K \times K \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \\ \cdot & : K \times K \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

definiert sind, heißt **Körper**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (1)  $\forall x, y, z \in K : x + (y + z) = (x + y) + z$  (Assoziativität der Add.)
- (2)  $\forall x, y \in K : x + y = y + x$  (Kommutativität der Add.)
- (3)  $\exists 0 \in K : \forall x \in K : x + 0 = x$  (Existenz der Null)
- (4)  $\forall x \in K : \exists (-x) \in K : x + (-x) = 0$  (Existenz des Negativen)
- (5)  $\forall x, y, z \in K : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  (Assoziativität der Mult.)
- (6)  $\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$  (Kommutativität der Mult.)
- (7)  $\exists 1 \in K : \forall x \in K : x + 1 = x$  (Existenz der Eins)
- (8)  $\forall x \in K : \exists (x^{-1}) \in K : x + (x^{-1}) = 1$  (Existenz des Inversen)
- (9)  $\forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  (Distributivgesetz)

**2.2.2 Axiom.**  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein Körper.

**2.2.3 Beispiel.**

- (1)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist ein Körper
- (2)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist *kein* Körper, da Axiom (8) nicht erfüllt ist.
- (3)  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  ist *kleinster* Körper mit:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

*Bemerkung.* Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Dann gilt:

(1) Die 0 ist eindeutig. (Sei  $\tilde{0}$  ein weiteres Nullelement, d.h.  $\tilde{0} + x = x \forall x \in K$ . Insbesondere ist dann  $\tilde{0} = \tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0} = 0$ , da die Addition kommutativ ist.)

(2) Für alle  $x \in K$  ist  $0x = 0$ , denn es gilt  $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ . Dann ist aber

$$0 = 0x + (-0x) = 0x + 0x + (-0x) = 0x.$$

(3) Für  $x \in K$  ist die  $n$ -te Potenz definiert durch

$$x^{0_{\mathbb{N}}} = 1_K \quad \text{und} \quad x^{n+1} = x^n \cdot x$$

Diese rekursive Definition gilt für  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zwischen  $1_K$  und  $1_{\mathbb{N}}$  sowie  $0_K$  und  $0_{\mathbb{N}_0}$  muss sorgfältig unterschieden werden. Außerdem gilt  $x^n x^m = x^{n+m}$  (Beweis durch einfache Induktion).



Für  $x \neq 1$  ist  $\sum_{k=0}^N x^k = (x^{N+1} - 1)(x - 1)^{-1}$ .

(4) Ebenfalls rekursiv kann man auch das  $n$ -fache ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) von  $x \in K$  definieren:

$$0_{\mathbb{N}_0}x = 0 \quad \text{und} \quad (n+1)x = nx + x$$

In  $\mathbb{F}_2 = 0, 1$  ist  $2x = 0$  für alle  $x \in \mathbb{F}_2$ .



Wir können alle arithmetischen Manipulationen wie gewohnt durchführen. Streng genommen müsste dabei aber jeder Rechenschritt mit Hilfe der Körpereigenschaften bewiesen werden.

## 2.3 Anordnung von $\mathbb{R}$

Aus der Schule wissen wir, dass sich die reellen Zahlen der Größe nach ordnen lassen. Es gibt also eine Relation  $<$  bzw.  $\leq$  zwischen Zahlen. In einem abstrakten Körper ist eine solche Ordnungsrelation zweckmäßig, da gewisse Elemente des Körpers als positiv ausgezeichnet werden.

$$x < y \Leftrightarrow x - y < 0 \Leftrightarrow y - x \text{ positiv}$$

Um zu einer sinnvollen Struktur zu kommen, geht man wie folgt vor:

**2.3.1 Definition.** Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper.  $K$  heißt **angeordnet**, wenn es eine Teilmenge  $K^+ \subset K$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

(01) Es existiert eine disjunkte Zerlegung

$$K = K^+ \cup \{0\} \cup \underbrace{\{-x : x \in K^+\}}_{=: -K^+}$$

ausführlich:  $0 \notin K^+ \cup (-K^+)$  und  $K^+ \cap (-K^+) = \emptyset$

$$(02) \quad \forall x, y \in K^+ \Rightarrow x + y \in K^+$$

$$(03) \quad \forall x, y \in K^+ \Rightarrow x \cdot y \in K^+$$

Dann heißen die Elemente von  $K^+$  **positiv** und die von  $-K^+$  **negativ**.

Damit wird eine Ordnungsrelation induziert:

$$\begin{aligned} x > y & : \Leftrightarrow x - y \in K^+ && \text{„größer“} \\ x \geq y & : \Leftrightarrow x - y \in K^+ \cup \{0\} && \text{„größergleich“} \\ x < y & : \Leftrightarrow x - y \in -K^+ && \text{„kleiner“} \\ x \leq y & : \Leftrightarrow x - y \in (-K^+) \cup \{0\} && \text{„kleinergleich“} \end{aligned}$$

Wenn  $(K, +, \cdot)$  angeordnet ist, so muss nach (03)  $1 \in K^+$  sein, denn  $1 \cdot 1 = 1$ .

**2.3.2 Axiom.**  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist ein angeordneter Körper.

**2.3.3 Proposition.** Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann ist

$$J : \mathbb{N}_0 \rightarrow K, \quad n \mapsto n \cdot 1_K$$

eine injektive Abbildung (Beweis durch vollständige Induktion). Durch

$$I : \mathbb{Q} \rightarrow K, \quad \frac{p}{q} \mapsto (p \cdot 1_K)(q \cdot 1_K)^{-1}$$

ist ein injektiver Homomorphismus von Körpern definiert.

Um die reellen Zahlen zu charakterisieren, benötigen wir ein weiteres Axiom, denn auch  $\mathbb{Q}$  ist ein angeordneter Körper. Um die für die Analysis wesentliche Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  zu definieren, führen wir folgende Sprechweisen ein:

**2.3.4 Definition.** Sei  $(K, +, \cdot, <)$  ein angeordneter Körper. Sei  $M \subset K$  und  $\kappa \in K$ . Dann heißt  $\kappa \in K$

$$\begin{array}{l} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \quad \text{Schranke von } M, \text{ falls } \forall m \in M : \begin{array}{l} \kappa \geq m \\ \kappa \leq m \end{array}.$$

Existiert eine obere/untere Schranke von  $M$ , so heißt  $M$  nach **oben/unten beschränkt**.

$M$  heißt **beschränkt**, wenn es nach oben und nach unten beschränkt ist.

Ein  $s \in K$  heißt **Supremum** von  $M$ , wenn es die kleinste obere Schranke von  $M$  ist. (Wenn  $s$  die kleinste obere Schranke ist, und  $\tilde{s}$  eine weitere obere Schranke, so ist  $\tilde{s} \geq s$ ).

Ein  $i \in K$  heißt **Infimum** von  $M$ , wenn  $i$  die größte untere Schranke von  $M$  ist.

Ein Körper heißt **ordnungsvollständig**, wenn jede nach oben beschränkte nichtleere Menge  $M \subset K$ ,  $M \neq \emptyset$  ein Supremum besitzt.

**2.3.5 Axiom.**  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  ist *ordnungsvollständig*.

*Bemerkung.*

- (1) Nicht alle Mengen in  $\mathbb{R}$  sind beschränkt. Zu zeigen: Für jeden angeordneten Körper  $K$  gilt:  $K$  ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
- (2) Nicht jeder Körper ist ordnungsvollständig.

*2.3.6 Beispiel.* In  $\mathbb{Q}$  ist  $M = \{x : x^2 < 2\}$  beschränkt, besitzt aber weder Supremum noch Infimum.

- (3) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  sind die Intervalle definiert durch ( $a < b$ ):

$$\begin{array}{ll}
 (a, b) & := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \inf M = a, \sup M = b \\
 [a, b] & := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{wie oben} \\
 (a, b] & := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{wie oben} \\
 [a, b) & := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{wie oben} \\
 [a, \infty) & := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad \inf M = a, \text{kein Supremum} \\
 (a, \infty) & := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad \text{wie davor} \\
 (-\infty, b] & := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad \text{kein Infimum, } \sup M = b \\
 (-\infty, b) & := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad \text{wie davor}
 \end{array}$$

- (4) Supremum und Infimum sind eindeutig (falls sie existieren).

Durch diese drei vorangegangenen Axiome ist  $\mathbb{R}$  eindeutig (bis auf „Isomorphie“ bestimmt). Das wollen wir hier nicht zeigen, ebensowenig die Existenz der reellen Zahlen.

Wir werden jetzt noch eine Eigenschaft der reellen Zahlen beweisen, die in manchen Zugängen als Axiom gefordert werden muss (Archimedisches Axiom).

**2.3.7 Satz.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ . Dann  $\exists n \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot x > y$ . (Statt  $\mathbb{R}$ :  $K$  ordnungsvollständig,  $n \cdot x$  hatten wir rekursiv definiert).

*Beweis.* Ist  $y \leq 0$ , so ist nichts zu zeigen, denn dann ist  $1 \cdot x > 0 \geq y$ .

Nun:  $y > 0$ . Betrachte  $M := \{n \cdot x : n \in \mathbb{N}\}$ . Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann müsste  $\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot x \leq y$ . Also wäre  $y$  obere Schranke von  $M$ . Dann existiert also  $s = \sup(M)$ . Da  $s$  obere Schranke von  $M$  ist, gilt:

$$\begin{aligned}
 & \forall n \in \mathbb{N} : (n+1) \cdot x \leq s \\
 & \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : n \cdot x + x \leq s \\
 & \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : n \cdot x \leq s - x \\
 & \Rightarrow s - x \text{ ist obere Schranke. Wenn } s \text{ das Supremum ist und } s - x \text{ eine obere Schranke} \\
 & \Rightarrow s \leq s - x \Rightarrow x \leq 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

Wir haben hier schon gesehen, dass es praktischer ist, mit Ungleichungen zu rechnen, als mit  $K^+$  zu argumentieren. Aus den Anordnungseigenschaften (01) - (03) aus der Definition 2.3.1 folgen unmittelbar die folgenden Rechenregeln für Ungleichungen, die wir ab sofort ohne weiteres verwenden werden:

**Ungleichungsregeln:**

Sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $x, y, z \in K$ , dann gilt

- (1)  $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$
- (2)  $x < y \quad y < z \Rightarrow x < z$  (Transitivität)
- (3)  $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
- (4)  $z > 0 \quad x < y \Rightarrow xz < yz$
- (5)  $x^2 \geq 0 \quad x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (6)  $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
- (7)  $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

*Beweis.* Die Beweise sind einfach. □

**2.3.8 Definition.** Der **Betrag** einer reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

**Rechenregeln für Betrag:** Sei  $(K, +, \cdot, <)$  ein angeordneter Körper. Dann gilt:

- (1)  $\forall x \in K \quad x \leq |x|, -x \leq |x|$
- (2)  $\forall x \in K \setminus \{0\} : |x| > 0$
- (3)  $|xy| = |x||y|$
- (4)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  Dreiecksungleichung

*Bemerkung (Existenzfragen).*

Existiert mit  $(K, +, \cdot, <)$  ein ordnungsvollständiger Körper?

Ja, wenn eine unendliche Menge existiert.

**Russelsche Antinomie**

$$\mathbb{M} := \{\text{die Menge aller Mengen}\}$$

$$\mathbb{B} := \{B \in \mathbb{M} : B \notin \mathbb{B}\}$$

$$\mathbb{B} \in \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \notin \mathbb{B} \quad \mathbb{B} \notin \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \in \mathbb{B} \quad \text{Widerspruch}$$

Ist  $(K, +, \cdot, <)$  eindeutig?

Sind  $K$  und  $\tilde{K}$  vollständig angeordnete Körper, so gibt es eine bijektive Abbildung

$$J : K \rightarrow \tilde{K}$$

mit folgenden Eigenschaften

$$J(x + y) = J(x) + J(y)$$

$$J(xy) = J(x)J(y)$$

$$J(K^+) = \tilde{K}^+$$

## 2.4 Intervallschachtelung und Folgen

In diesem Abschnitt geht es um alternative Beschreibungen der Vollständigkeit. In unserem Zugang ergeben sie sich als Konsequenzen der Ordnungsvollständigkeit.

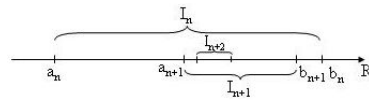
Wir erinnern an die Schreibweise  $(a, b), [a, b), \dots$ , für Intervalle in  $\mathbb{R}$ . Ist  $a \leq b$ , so definiert man:

**2.4.1 Definition.** Länge eines Intervalls:  $|(a, b)| = |b - a|$ .

**2.4.2 Definition.** Eine Folge  $I_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) abgeschlossener Intervalle heißt **Intervallschachtelung**, falls

$$(i) \quad I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \quad |I_n| \rightarrow 0 \quad \text{d.h. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } |I_n| < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0$$



**2.4.3 Satz (Intervallschachtelungsprinzip).** Für jede Intervallschachtelung gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in I_n \quad n \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

*Beweis.*

- Existenz:

Sei  $I_n = [a_n, b_n]$  gegeben,  $a_n \leq b_n$  und  $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Da  $I_n \subset I_1$ , gilt  $a_n \leq b_n \leq b_1$ . Also ist  $M$  beschränkt. Wegen der Ordnungsvollständigkeit existiert  $x = \sup(M)$ . Aus  $a_n \leq b_n$  folgt, dass  $b_n$  obere Schranke von  $M$  ist. Als Eigenschaft des Supremum folgt  $x \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit  $x \geq a_n \quad x \leq b_n \Leftrightarrow x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $x = \sup a_n$  und  $x = \inf b_n$  existiert wegen Ordnungsvollständigkeit.

- Eindeutigkeit:

Es sei  $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \Rightarrow |x - y| \leq |I_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit folgt  $x = y$ , da  $|I_n| \rightarrow 0$ .

□

Wie haben schon stillschweigend einen wichtigen Begriff vorweggenommen, den einer Folge:

**2.4.4 Definition (Folge).** Sei  $X$  eine Menge. Eine **Folge** in  $X$  ist eine Abbildung  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  sowie  $x_n := x(n)$  das  $n$ -te Folgenglied. Oft schreibt man  $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**2.4.5 Beispiel.** (1) Für  $a \in \mathbb{R}$  ist  $(a)_{n \in \mathbb{N}}$   $n \mapsto a$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ : die konstante Folge.

(2) Durch  $x_n = \frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  wird die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  definiert.

(3) Für  $q \in \mathbb{R}$  ist  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

**Wichtig:** Unterscheidung zwischen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und der Trägermenge  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

**2.4.6 Beispiel.** (1)  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$

(2)

$$x_n = \begin{cases} -1 & : x = 1 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \{-1, 1\}$$

**2.4.7 Definition (Konvergenz).** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .  $(x_n)$  heißt **konvergent gegen**  $x$ , geschrieben  $x_n \rightarrow x$  für  $x \rightarrow \infty$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |x - x_n| \leq \varepsilon.$$

Falls dies nicht gilt, heißt  $(x_n)$  **divergent**.

*Bemerkung.* Konvergenz bedeutet, dass fast alle Folgenglieder, bis auf endlich viele, in  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$  liegen.

**2.4.8 Beispiel.** (von oben) Für die Folgen von oben gilt:

(1)  $a \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(2)  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(3)  $q^n$  konvergiert für  $q \in (-1, 1]$

*Begründung.* Es existiert  $n_0$  mit  $n_0 \varepsilon > 1$  wegen des Archimedischen Axioms. Da  $0 < n_0 < n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$  gilt  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- $q = 1 \Rightarrow q_n = 1 \rightarrow 1$
- $|q| < 1 \Rightarrow q_n \rightarrow 0$
- $q = -1$ : Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig, dann gilt  $|x - 1| + |x + 1| \geq 2$ .

$\Rightarrow$  dann gibt es kein  $n_0$ , sodass z.B. für  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$   $|x - (-1)^n| < \varepsilon$   
da  $|x - (-1)^n| + |x - (-1)^{n+1}| \geq 2$

**2.4.9 Proposition (Eindeutigkeit des Grenzwertes).** Seien  $(x_n), (y_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \rightarrow y$ , dann ist  $x = y$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, dann gilt

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : |x - x_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_1$$

$$x_n \rightarrow y \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : |y - x_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_2$$

für  $n_0 \geq \max(n_1, n_2)$  gilt dann

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq 2\varepsilon$$

$$\text{also } |x - y| \rightarrow 0 \Rightarrow x = y$$

□

Ist  $(x_n)$  konvergent, so gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow x$  und wir schreiben

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{Limes oder Grenzwert von } x_n.$$

**2.4.10 Definition (Teilfolge).** Sei  $x_n$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und sei  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $n_k < n_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann heißt  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  **Teilfolge** von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**2.4.11 Beispiel.** (1) Die Teilfolgen  $((1)_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $((-1)_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  sind zwei Teilfolgen von  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Es gibt unendlich viele Teilfolgen.

(2)  $((\frac{1}{2})^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist Teilfolge von  $\frac{1}{n}$  mit  $(\frac{1}{n})_{n=2^k}$ .

**2.4.12 Satz (Satz von Bolzano–Weierstraß).** Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Dabei heißt  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  natürlich beschränkt, wenn die Menge  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist, d.h. wenn es  $a, b \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a \leq x_n \leq b$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**2.4.13 Beispiel.** (1)  $(-1^n)$  ist beschränkt.

(2)  $(n)$  ist unbeschränkt, besitzt also auch keine konvergente Teilfolge.

(3)  $(n(1 + (-1)^n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ist unbeschränkt, hat aber konvergente Teilfolgen, z. B. für ungerade  $n$ .

*Beweis.* [Satz (2.4.12) von Bolzano–Weierstraß]

(1) **Beweis mit Induktion:**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  eine untere bzw. obere Schranke von  $x_n$ . Für  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es ein Intervall  $I_k$  mit

- $|I_k| = (b - a) \cdot 2^{-k}$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ )
- $I_{k+1} \subset I_k$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ )
- Für alle  $k \in \mathbb{N}$  hat  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_k\}$  unendlich viele Elemente.

**Induktionsanfang:**

Da  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ , kann mit  $I_0 = [a, b]$  begonnen werden.

**Induktionsschritt:**

Sei  $I_k$  gegeben,  $I_k = [a_k, b_k]$ , und sei  $c_k = \frac{(a_k + b_k)}{2}$ . Dann ist  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_k\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a_k, c_k]\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [c_k, b_k]\}$ . Also eine der beiden letzteren Mengen ist unendlich. Sei die erstere der beiden unendlich. Dann ist  $I_{k+1} = (a_k, c_k)$ , sonst  $I_{k+1} = (c_k, b_k)$ . Es folgt:  $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|b_k - a_k| = \frac{1}{2}|I_k| = \frac{1}{2}(b - a) \cdot 2^{-k} = (b - a) \cdot 2^{-(k+1)} \Rightarrow I_{k+1} \subset I_k$  und nach Konstruktion ist  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_{k+1}\}$  unendlich. Somit Induktion erfolgreich abgeschlossen.

(2) Konstruktion von  $(n_k)$  in  $\mathbb{N}$  mit  $n_{k+1} > n_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $x_{n_k} \in I_k$ . (Das ist die Teilfolge.)

Induktion:

- $k = 1$  : Da unendlich viele Folgenglieder in  $I_1$  liegen, gibt es ein  $n_1$  mit  $x_{n_1} \in I_1$ .
- $k \rightarrow k + 1$  : für  $k$  gilt also  $x_{n_k} \in I_k$ , außerdem ist  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_k\}$  unendlich.  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I_{k+1} \text{ und } n > n_k\}$  ist ebenfalls unendlich.  $\Rightarrow$  es gibt  $n_{k+1} > n_k$  mit  $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ .

(3) Zusammensetzen:

Nach (1) wurde eine Intervallschachtelung  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konstruiert. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$ .

Behauptung:  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Sei dazu  $\varepsilon > 0$  gegeben, z.B.  $\varepsilon = 10^{-42}$ . Weil  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  und damit  $2^{-k} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $(b-a) \cdot 2^{-k} < \varepsilon$ ,  $k \geq n_0$ . Für  $k \geq n_0$  ist  $x_{n_k} \in I_k, x \in I_k \Rightarrow |x - x_{n_k}| \leq |I_k| \leq (b-a) \cdot 2^{-k} \leq \varepsilon$ , also sind wir fertig. □

**2.4.14 Definition (Cauchy-Folge).** Eine Folge  $x_n$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so daß für alle  $n, m \geq N$  :  $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$ . D.h. die Folgenglieder rücken beliebig dicht zusammen.

**2.4.15 Proposition.** (1) Jede konvergente Folge ist eine CAUCHY-Folge.

(2) Ist  $(x_n)$  eine CAUCHY-Folge und besitzt  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ , so ist die Teilfolge selbst konvergent.

*Beweis.* (1) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existieren wegen der Konvergenz ein  $x \in \mathbb{R}$  und ein  $N \in \mathbb{N}$ :  $|x - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  ( $n \geq N$ ). Sind  $n, m \geq N$ , so gilt:  $|x_n - x_m| = |x_n - x + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

(2) Sei  $(x_n)$  eine CAUCHY-Folge, und  $x_{n_k} \rightarrow x, k \rightarrow \infty$ . Zu zeigen ist  $x_n \rightarrow x$ . Dazu sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  :  $|x_{n_k} - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  ( $k \geq k_0$ ), weil  $(x_n)$  eine CAUCHY-Folge ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  ( $n, m \geq N$ ). Sei  $n_0 = \max\{n_{k_0}, N\}$ . Für  $n \geq n_0$  ist  $|x - x_n| = |x - x_{n_k} + x_{n_k} - x_n| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$  für  $k \geq k_0, n_k \geq N$ . □

**2.4.16 Satz (Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ ).** Jede CAUCHY-Folge in  $\mathbb{R}$  ist konvergent.

*Beweis.* Aus  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CAUCHY-Folge folgt:  $(x_n)$  ist beschränkt. Für  $\varepsilon = 1$  existiert ein  $N_1$  mit  $|x_n - x_m| \leq 1$ ,  $n, m \geq N_1 \Rightarrow \{x_n : n \geq N_1\} \subset [x_{N_1} - 1, x_{N_1} + 1]$ .

Wähle  $a = \min\{x_n : n \geq N_1\} \cup \{x_{N_1} - 1\}$  und  $b = \max\{x_n : n \geq N_1\}$  vereinigt mit  $x_{N_1} + 1 \Rightarrow a \leq x_n \leq b$ , für alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  (Satz (2.4.12) von Bolzano–Weierstraß)  $(x_n)$  besitzt konvergente Teilfolge.  $\Rightarrow$  (Proposition (2.4.15))  $(x_n)$  ist konvergent. □

**Zusammenfassung:**

Folgende vier Gruppen von Aussagen sind äquivalent:

- (1) •  $K$  ist angeordneter Körper

- $K$  erfüllt das Archimedesche Axiom. (zu jeder denkbaren Zahl gibt es eine natürliche, die noch größer ist)
  - $K$  erfüllt das Axiom der verschachtelten Intervalle
- (2) •  $K$  ist angeordneter Körper
- $K$  ist ordnungsvollständig
- (3) •  $K$  ist angeordneter Körper
- $K$  erfüllt das Archimedesche Axiom. (zu jeder denkbaren Zahl gibt es eine natürliche, die noch größer ist)
  - $K$  ist vollständig
- (4) •  $K = \mathbb{R}$

## 2.5 Rechnen mit Folgen

Hier zeigen wir, daß Konvergenz und Arithmetik der reellen Zahlen zusammenpassen.

**2.5.1 Satz.** Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ . Dann gilt:

- (1)  $x_n + y_n \rightarrow x + y$  für  $n \rightarrow \infty$
- (2)  $x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y$  für  $n \rightarrow \infty$
- (3)  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y}$  für  $n \geq n_0$ ,  $n \rightarrow \infty$  (Ist  $y \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $y_n \neq 0$ , ( $n \geq n_0$ )).

*Beweis.*

- (1) Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $x_n \rightarrow x$ , gibt es ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|x - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  ( $n \geq n_1$ ). Wähle  $n_0 = \max\{n_0, n_1\}$ . Dann gilt für  $n \geq n_0$  :  
 $|(x + y) - (x_n + y_n)| = |x - x_n + y - y_n| \leq |x - x_n| + |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
- (2) Nebenrechnung:  $|x \cdot y - x_n \cdot y_n| = |x \cdot y - y \cdot x_n + y \cdot x_n - x_n \cdot y_n| = |y(x - x_n) + x_n(y - y_n)| \leq |y| \cdot |x - x_n| + |x_n| \cdot |y - y_n|$
- Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $(x_n)$  konvergiert, gibt es ein  $M$  mit  $|x_n| \leq M$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Außerdem gibt es ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|x - x_n| \cdot |y| < \frac{\varepsilon}{2}$  ( $n \geq n_1$ ) Wegen  $y_n \rightarrow y$  gibt es ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|y - y_n| \cdot M < \frac{\varepsilon}{2}$  ( $n \geq n_2$ ). Für  $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$  und  $n \geq n_0$ :  
 $|x \cdot y - x_n \cdot y_n| = \dots$  (Nebenrechnung)  $\dots \leq |y| \cdot |x - x_n| + |x_n| \cdot |y - y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M|y - y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
- (3) Für  $\varepsilon - \frac{|y|}{2} > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|y_n - y| \geq \varepsilon$  ( $n \geq n_0$ ). Behauptung: Für ( $n \geq n_0$ ) ist  $y_n \neq 0$ , denn:

$$|y_n| = |y - (y_n - y)| \geq |y| - |y_n - y| \geq \frac{|y|}{2} > 0 \quad (1)$$

- 1. Fall:  $x_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $y_n \rightarrow y$  existiert ein  $n_1$  mit

$$|y - y_n| < \varepsilon \cdot \frac{|y|}{2} \quad (n \geq n_1) \quad (2)$$

Wähle  $n_2 = \max\{n_1, n_0\}$ . Für  $n \geq n_2$ :  $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}| = \frac{|y - y_n|}{|y \cdot y_n|} \leq$  (nach (1))  $2 \cdot \frac{|y - y_n|}{|y|^2} \leq$  (nach (2))  $\varepsilon$ .

- Allgemeiner Fall: Im 1. Fall wurde gezeigt, dass  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y}$ . Nun ist  $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \Rightarrow$  (nach 2)  $x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

□

**2.5.2 Beispiel.** (1) Mit  $x_n \rightarrow x, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow x_n^k \rightarrow x^k$

$$(2) c \in \mathbb{R}, x_n \rightarrow x \Rightarrow c \cdot x_n \rightarrow c \cdot x$$

$$(3) \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$(4) (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$$

$$(5) \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

$$(6) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots \rightarrow \ln(2)$$

**2.5.3 Satz.** Seien  $(x_n), (y_n)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \leq y_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n := y.$$

*Beweis.* Angenommen nicht, dann ist  $\varepsilon := \frac{x-y}{2} > 0$ . Also existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_0$ . Außerdem existiert ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_1$ . Für  $n = \max\{n_0, n_1\}$ :  $y_n \leq (*)y + \frac{\varepsilon}{2} \leq x - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_n \Rightarrow y_n < x_n$ . Das ist ein Widerspruch. □

**2.5.4 Definition.** Eine Folge  $(x_n)$  heißt **monoton fallend**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\leq x_n \\ x_{n+1} &\geq x_n \end{aligned} .$$

**2.5.5 Satz.** Jede beschränkte monotone Folge  $(x_n) \in \mathbb{R}$  ist konvergent.

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $(x_n)$  monoton steigend (anderer Fall analog).  $\Rightarrow$  (Satz (2.4.12) von Bolzano-Weierstraß)  $(x_n)$  besitzt eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ . Sei  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n_k})$ . Wegen des vorherigen Satzes ist  $x_n \leq x$ , denn für  $k \neq n$  gilt:  $x_n \leq (x_{n_k})$  ( $\Rightarrow x_n \leq x$ )  $\Rightarrow$  (Satz)  $x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} x_n \leq x = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k})$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$  so groß, daß  $|x - x_{n_k}| < \varepsilon$  ( $k \neq k_0$ )

Wähle  $n_0 = n_{k_0}$ , dann gilt für  $n \neq n_0$ :  $x - \varepsilon < x_{n_{k_0}} = x_{n_0} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon$  ( $n \neq n_0$ ) □

Ist  $x_n < y_n$  und geht  $x_n$  gegen  $x$  und  $y_n$  gegen  $y$ , so folgt daraus nicht, daß  $x < y$ .

**2.5.6 Beispiel.**  $x_n = 0$  und  $y_n = \frac{1}{n}$

Für eine beschränkte, monoton steigende Folge  $(x_n)$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Warum?

Sei  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow$  (nach Voraussetzung), also obere Schranke von  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Angenommen, dies ist nicht das Supremum  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Dann existiert ein  $x' < x$  und  $x'$  sei obere Schranke von  $x_n$ . Daraus folgt  $x_n \leq x'$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Nach Grenzübergang folgt dann:  $x \leq x'$ , ein Widerspruch!

*Bemerkung.* Sei  $M \neq \emptyset$ ,  $M \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt. Dann ist  $\sup(M) = S$  genau dann, wenn

- (1)  $S$  ist obere Schranke von  $M$ .
- (2) Für alle  $\varepsilon > 0$ :  $(S - \varepsilon, S]$  vereinigt mit  $M \neq \emptyset$ .

Insbesondere gibt es eine Folge  $(x_n) \in M$ , mit  $x_n \rightarrow S$ ; dabei kann  $(x_n)$  monoton steigend gewählt werden.

*Begründung.* (1) Sei  $S = \sup(M) \Rightarrow$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann ist  $S - \varepsilon < S$ , damit ist  $S - \varepsilon$  keine obere Schranke. Also existiert ein  $x \in M$ :  $x > S - \varepsilon \Rightarrow M$  und  $(s - \varepsilon, \infty) = M$  und  $(s - \varepsilon, S] \neq \emptyset$ . Damit  $\Rightarrow$  gezeigt.

- (2) Seien umgekehrt (1) und (2) erfüllt. Dann ist zu zeigen, daß  $S = \sup(M)$ . Offenbar ist  $S$  eine obere Schranke (nach (1)). Ist es auch die kleinste obere Schranke? Dazu sei  $\varsigma$  obere Schranke von  $M$ . Mit (2) folgt:  $S - \varepsilon \leq \varsigma$  ( $\varepsilon > 0$ )  $\rightarrow S \leq \varsigma$

Zur Existenz von  $x_n$ : Für  $n \in \mathbb{N}$  existiert  $x_n \in M$  und  $(S - \frac{1}{n}, S] \Rightarrow x_n \rightarrow \varsigma$ , für  $n \rightarrow \infty$ . Monotone Folge induktiv definieren:  $(x_{n+1} \in M$  und  $[x_n, S]$  und  $[S - \frac{1}{n}, S]$

Jetzt eine Folgerung aus dem archimedischen Prinzip (2.3.7): Inhalt: Bezüglich Konvergenz ist  $\mathbb{R}$  nicht viel größer als  $\mathbb{Q}$ .

**2.5.7 Satz.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$  gibt es eine rationale Zahl, die zwischen  $x$  und  $y$  liegt.  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $x < q < y$ . Insbesondere ist  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$ , d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig:  $\mathbb{Q}$  und  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$ .

*Beweis.* Da  $y - x > 0$ , existiert nach dem archimedischen Prinzip ein  $m \in \mathbb{N}$ :  $m(y - x) > 1$ . Setze nun  $M := \{k \in \mathbb{Z} : k < my\} = \{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{m} < y\} \Rightarrow M$  nach oben beschränkt. Also existiert ein  $n := \sup(M) \Rightarrow n \in \mathbb{M}$ , also  $\frac{n}{m} < y$  (1) Außerdem folgt  $\frac{n}{m} > x$  (2) (denn mit  $n \leq mx$  und  $(y - x)m > 1 \Rightarrow n + 1 < mx + m(y - x) = my \Rightarrow n + 1 \in M$ , da aber  $n = \sup(M)$ , folgt ein Widerspruch!) Aus (1) und (2) folgt:  $x < n/m < y$  d.h.  $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$  und  $(x, y)$   $\square$

*Bemerkung.* Eine Menge  $X$  heißt **abzählbar**, wenn es eine surjektive Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  gibt, oder **überabzählbar**, falls nicht.

Nach Cantor ist

- (1)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.
- (2)  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar.

## 3 Metrische Räume

### 3.1 Definition und Beispiele

In diesem Abschnitt wird eine Struktur vorgestellt, mit deren Hilfe sich Konvergenz gut definieren läßt. Desweiteren wird der Begriff der Stetigkeit eingeführt.

**3.1.1 Definition.** Sei  $M \neq \emptyset$  eine Menge und  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (M1) Symmetrie: Für alle  $x, y \in M$  gilt:  $d(x, y) = d(y, x)$
- (M2) Für  $x \neq y$  ist  $d(x, y) > 0$ ,  $d(x, x) = 0$
- (M3) Dreiecksungleichung: Für  $x, y, z \in M$  gilt:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Dann heißt  $d$  **Metrik** ( $d \sim$  distance) auf  $M$  und  $(M, d)$  heißt **Metrischer Raum**. Oft wird  $d$  nicht extra erwähnt.

**3.1.2 Beispiel.** (1) Für  $M \neq \emptyset$  ist die diskrete Metrik  $d_{\text{diskret}}$  durch

$$d_{\text{diskret}}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.  $\Rightarrow d_{\text{diskret}}$  ist eine recht langweilige Metrik.

- (2) Auf  $\mathbb{R}$  ist durch  $d(x, y) := |x - y|$  die übliche (euklidische) Metrik definiert.
- (3) Auf  $\mathbb{C}$  wird mit  $d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(z - w)(\overline{z - w})}$  die euklidische Metrik definiert.
- (4) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Auf  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$  wird für  $p \in [1, \infty)$  durch

$$d_p(x, y) := \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

die  $l^p$ -Metrik definiert. Für  $p = 2$  ist  $d_2$  die übliche euklidische Metrik. Für  $p = \infty$  ist

$$d_\infty(x, y) := \sup_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

die Supremumsmetrik. Dass es sich hierbei jeweils um Metriken handelt, werden wir für  $p \neq 1$  und  $p \neq \infty$  später sehen. Im Fall  $p = 2$  ergibt sich die euklidische Metrik (aus dem Crash-Kurs bekannt).

*Begründung.* Für  $p = 1$ : Symmetrie:  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ ,  $x = y$

$$\Rightarrow d_p(x, y) = \left( \sum 0 \right)^{1/p} = 0.$$

Noch zu zeigen:  $d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$ : Dazu:

$$\begin{aligned} d_1(x, z) &= \sum_{i=1}^n |z_i - x_i| = \sum_{i=1}^n |z_i - y_i + y_i - x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|z_i - y_i| + |y_i - x_i|) \quad (\text{nach Dreiecksungleichung}) \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d(y, z) + d(y, x) \end{aligned}$$

Fehlt noch die Begründung der Dreiecksungleichung für  $d_\infty$ : mit  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  und  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} |x_i - z_i| &= |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z) \\ \Rightarrow \max_i |x_i - z_i| &= d_\infty(x, z) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z) \end{aligned}$$

In metrischen Räumen kann man einen vernünftigen Konvergenzbegriff einführen:

**3.1.3 Definition.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $(x_n)$  eine Folge in  $M$ ,  $x \in M$ . Wir sagen  $(x_n)$  **konvergiert gegen  $x$  in  $(M, d)$  bezüglich der Metrik  $d$** , falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

Offensichtlich stimmt das mit Definition (2.4.7) überein.

Weiter definieren wir die **Kugel im metrischen Raum  $(M, d)$**  für  $x \in M, r \geq 0$ , durch:

$$\begin{aligned} B_r(x) &:= \{y \in M : d(x, y) \leq r\} && \text{abgeschlossene d-Kugel} \\ U_r(x) &:= \{y \in M : d(x, y) < r\} && \text{offene d-Kugel} \end{aligned}$$

Damit gilt:  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow$  Für jeden Radius  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in B_\varepsilon(x)$  für alle  $n \geq n_0$

**3.1.4 Beispiel.** Verschiedene Kugeln in verschiedenen Metriken:

(1) diskrete Metrik:  $B_1(x) = M$ ,  $U_1(x) = \{x\} = B_r(x)$  für  $0 \leq r < 1$ . Was heißt das für Konvergenz?  $x_n \rightarrow x$  in  $(M, d_d)$ , wenn ein  $n_0$  existiert mit  $d(x_n, x) \leq 1/2$  für  $n \geq n_0$ , d.h.  $x_n = x$  für  $n \geq n_0$

(2)  $\mathbb{R}$  mit üblicher Metrik:

$$B_\varepsilon(x) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

(3) Kugeln in  $\mathbb{C}$  mit üblicher Metrik: übliche Kugeln.

(4) Einheitskugeln  $B_1(0)$  in  $(\mathbb{R}^2, d_p)$  für  $p = 1, 2$  und  $\infty$ :

- $p = 1$ : Bezüglich  $d_1$ :

$$B_1(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1(y, 0) \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1 - 0| + |y_2 - 0| \leq 1\}$$

- $p = 2$ :  $B_1(0)$  bez. euklidischer Metrik ist  $\{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1|^2 + |y_2|^2 \leq 1\}$ , also eine "gewöhnliche" Kugel.
- $p = \infty$ : Bezüglich  $d_\infty$ :

$$B_1(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \max\{|y_1|, |y_2|\} \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| \leq 1 \text{ und } |y_2| \leq 1\}$$

**3.1.5 Proposition (äquivalent zu (2.4.9)).** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum sowie  $(x_n)$  eine Folge in  $M$ . Weiter seien  $x, y \in M$  und  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist  $x = y$ .

*Beweis.* Seien  $x, y, (x_n)$  wie im Satz gefordert und sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit

$$d(x, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geq n_1.$$

Außerdem existiert  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit

$$d(y, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geq n_2.$$

Dann gilt für  $n \geq n_1 + n_2$ :

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $d(x, y) = 0$  und also  $x = y$ . □

**3.1.6 Lemma (auch Definition).** Es seien  $d_1$  und  $d_2$  zwei Metriken auf  $M$ . Wir nennen  $d_1$  und  $d_2$  äquivalent, wenn es  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  gibt mit:

$$d_1(x, y) \leq c_1 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad (x, y \in M)$$

In diesem Fall konvergiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann bezüglich  $d_1$ , wenn sie bezüglich  $d_2$  konvergiert.

**3.1.7 Beispiel.** (1) Auf  $\mathbb{R}^n$  sind alle Metriken  $d_p$  äquivalent und damit ist die Konvergenz bezüglich  $d_p$  äquivalent zur Konvergenz bezüglich  $d_\infty$ ; letztere ist äquivalent zur Konvergenz der Koordinatenfolgen.

(2) Die übliche und die diskrete Metrik sind nicht äquivalent auf  $\mathbb{R}$ .

*Beweis.* (zu (3.1.6)). Sei  $x_n \rightarrow x$  bezüglich  $d_1$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$d(x, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{c_2} c_1 \quad \text{für } n \geq n_0$$

Für dieses  $n_0$  und  $n \geq n_0$  ist nach Definition der Äquivalenz:

$$d_2 \leq \frac{c_2}{c_1} d_1 \leq \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} \varepsilon = \varepsilon$$

Also konvergiert  $x_n$  bezüglich  $d_2$ . Analog zeigt man, dass aus der Konvergenz von  $x_n$  bezüglich  $d_2$  stets die Konvergenz bezüglich  $d_1$  folgt.  $\square$

**3.1.8 Lemma.** Auf  $\mathbb{R}^n$  betrachte die Metriken  $d_p$ ,  $p \in [1, \infty]$  mit

$$d_p((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \left( \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(1) Für alle  $p, q \in [1, \infty]$  sind  $d_p$  und  $d_q$  äquivalent.

(2) Sei  $(x_k)$  Folge in  $\mathbb{R}^n$  mit  $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Dann gilt:

$$x_k \rightarrow x \text{ in } (\mathbb{R}^n, d_p) \Leftrightarrow x_k^i \rightarrow x_i \text{ in } \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

*Beweis.*

(1) Wir zeigen, dass für alle  $p$   $d_p$  äquivalent zu  $d_\infty$  ist. Für  $x = (x^1, \dots, x^n)$  und  $y = (y^1, \dots, y^n)$  gilt

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= \left( \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n (\max |y_i - x_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n d_\infty(x, y)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y) \end{aligned}$$

Also ist  $d_\infty \leq d_p(x, y)$ .

(2) Wegen (1) ist es belanglos, welche Metrik  $d_p$  verwendet wird. Sei nun  $x_k \rightarrow x$  in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$d_\infty(x_k, x) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Für dieses  $n_0$  und beliebige  $i \in \{1, \dots, n\}$  muss gelten ( $k \geq n_0$ ):

$$|x_k^i - x^i| \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_k^i - x^i| = d_\infty(x_k, x) < \varepsilon$$

Also folgt  $x_k^i \rightarrow x^i$  für  $k \rightarrow \infty$ .

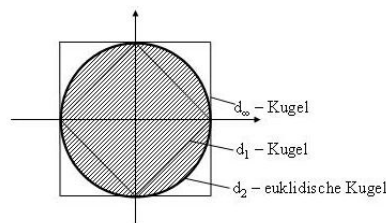
Umgekehrt setzen wir voraus, dass für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Folgen  $x_k^i \rightarrow x^i$  konvergieren. Dann gibt es für  $\varepsilon > 0$  jeweils  $n_i \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\forall k \geq n_i : |x_k^i - x^i| < \varepsilon$$

Sei weiter  $n_0 = \max_{i=1, \dots, n} n_i$ . Für  $k \geq n_0$  ist dann  $|x_k^i - x^i| < \varepsilon$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Also ist auch  $d_\infty(x_k, x) = \max_{i=1, \dots, n} |x_k^i - x^i| < \varepsilon$ .

□

Bild für die  $d_p$ -Kugeln mit  $r = 1$  um 0 :



Damit können wir Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$  auf Konvergenz in  $\mathbb{R}$  zurückführen. Schreiben wir

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ so ist } x_i \text{ die } i\text{-te Koordinate;}$$

definiere

$$pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto x_i.$$

Damit können wir Lemma (3.1.8) wie folgt umformulieren:

Sei  $(x_k)$  eine Folge in  $(\mathbb{R}^n, d_p)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt:

$$x_k \rightarrow x \text{ in } (\mathbb{R}^n, d_p) \Leftrightarrow pr_i(x_k) \rightarrow pr_i(x) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

$$\underbrace{pr_i(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)}_{\in \mathbb{R}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{pr_i(x_k)}_{\in \mathbb{R}}$$

## 3.2 Offene Mengen, Umgebungen und Stetigkeit

**3.2.1 Definition.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- (1) Sei  $x \in M$ . Eine Menge  $U \subset M$  heißt **Umgebung** von  $x$ , wenn es ein  $r > 0$  gibt mit  $U_r(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\} \subset U$ .

(2) Eine Menge  $U \subset M$  heißt **offen**, wenn  $U$  für jedes  $x \in U$  eine Umgebung von  $x$  ist, d.h. wenn  $\forall x \in U \exists r_x > 0 : U_{r_x}(x) \subset U$ .

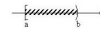
(3) Eine Menge  $A \subset M$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $A^c = M \setminus A$  offen ist.

**3.2.2 Beispiel.** (1)  $M, \emptyset$  sind offen und abgeschlossen in jedem metrischen Raum  $(M, d)$ .

(2)  $U_{r_0}(x_0) = \{y \in M : d(x_0, y) < r_0\}$  ist offen in jedem metrischen Raum.

(3)  $B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$  ist abgeschlossen in jedem metrischen Raum.

(4) In  $\mathbb{R}$  ist  $[a, b)$  mit  $b > a$  weder offen noch abgeschlossen. Für  $x \in (a, b)$  existieren



Umgebungen, nicht jedoch für  $a$ !

(5) In  $\mathbb{C}$  ist  $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\} \leq 0\}$  abgeschlossen und  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\} > 0\}$  offen.

*Begründung.*

(1) Für  $x \in M$  ist  $B_1(x) \subset M$ , also ist  $M$  offen.  $\Rightarrow M^c = \emptyset$  ist abgeschlossen. Da es kein  $x \in \emptyset$  gibt, ist  $\emptyset$  offen.

(2) Sei  $x \in U_{r_0}(x_0)$ . Dann liegt für  $r = \frac{1}{2}(r_0 - d(x, x_0))$  die Kugel  $B_r(x)$  in  $U_{r_0}(x_0)$ . Es ist nämlich für  $y \in B_r(x)$ :

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, x) + d(x, y) \leq d(x_0, x) + \frac{1}{2}(r_0 - d(x, x_0)) \\ &= \frac{1}{2}r_0 + \frac{1}{2}d(x_0, x) < \frac{1}{2}r_0 + \frac{1}{2}r_0 = r_0 \end{aligned}$$

(3) Um zu zeigen, dass  $B_{r_0}(x_0)$  abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, dass  $U := B_{r_0}(x_0)^c$  offen ist.  $U = \{x \in M : d(x, x_0) > r_0\}$ . für  $x \in U$ ,  $r = \frac{1}{2}(d(x, x_0) - r_0)$  ist  $B_r(x) \subset U$ . Denn: für  $y \in B_r(x)$  gilt:

$$d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(x, y)$$

$$\Rightarrow d(x_0, y) \geq d(x_0, x) - d(x, y) \geq d(x_0, x) - r = \frac{d(x_0, x)}{2} + \frac{r_0}{2} > r_0$$

(4) Betrachte  $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Bezüglich der Metrik in  $\mathbb{R}$  ist  $B_r(x) = [x - r, x + r]$ ,  $B_r(a) \not\subset [a, b)$ , denn  $a - r \notin [a, b) \Rightarrow [a, b)$  ist nicht offen.

$[a, b)$  ist nicht abgeschlossen:  $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ , und für  $r > 0$  genügend klein ist  $b - r \notin (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ , also enthält  $[a, b)^c$  keine  $r$ -Kugel um  $b$ .

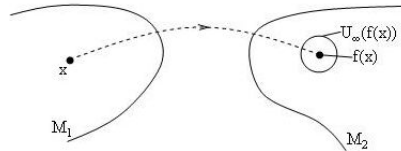
(5)  $H$  ist abgeschlossen und  $G$  offen: einfach

*Bemerkung.* Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- (1) Für  $r > 0$  und  $x \in M$  sind  $B_r(x)$  und  $U_r(x)$  Umgebungen von  $x$ .
- (2) Für alle  $x \in M, r > 0$  ist  $U_r(x)$  offen.
- (3)  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow$  Für jede Umgebung  $U$  von  $x$  gibt es ein  $n_v \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq n_v : x_n \in U$   
*Begründung.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $x_n \rightarrow x$  und  $U$  eine Umgebung von  $x$ , d.h. es gibt ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset U$ . Da  $x_n \rightarrow x$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(x, x_n) \leq \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Wir können  $n_v = n_0$  wählen, denn für  $n \geq n_v = n_0$  ist  $x_n \in B_\varepsilon(x) \subset U$   
 „ $\Leftarrow$ “ Kugeln  $B_\varepsilon(x)$  sind Umgebungen,  $n_\varepsilon := n_{B_\varepsilon(x)}$ .

**3.2.3 Definition.** Seien  $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$  metrische Räume,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine Abbildung und  $x_0 \in M_1$ . Dann heißt  $f$  **stetig an der Stelle  $x_0$** , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad d(x, x_0) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$$



**3.2.4 Satz.** Seien  $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$  metrische Räume,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  und  $x_0 \in M_1$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $f$  ist stetig in  $x_0 \in M_1$ .
- (2) Aus  $x_n \rightarrow x_0$  für eine Folge  $(x_n)$  in  $M_1$  folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  in  $M_2$ . „ $f$  ist folgenstetig“.

**3.2.5 Beispiel.** (1) Die Identität  $id : M \rightarrow M, id(x) = x$  ist in jedem metrischen Raum überall stetig.

- (2) Sei  $M = \mathbb{R}$  mit üblicher Metrik. Dann ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$  eine stetige Funktion.
- (3) Konstante Funktionen sind stetig.
- (4) Die Koordinatenabbildungen  $pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$  sind stetig von  $(\mathbb{R}^n, d_p)$ ,  $p$  beliebig, nach  $\mathbb{R}$  mit üblicher Metrik.

*Begründung.* zu (1)

Sei  $x_0 \in M$  beliebig und  $0 < \delta < \varepsilon$ . Dann ist  $id(U_\delta(x_0)) = U_\delta(x_0) \subset U_\varepsilon(id(x_0))$ .

*Begründung.* zu (2)

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Wenn  $f(x)$  stetig bei  $x_0$  ist, muss es zu jedem  $\varepsilon$  ein  $\delta > 0$  geben, so dass gilt:  $f(x_0 + \delta) = x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 < x_0^2 + \varepsilon$ . Dies ist z.B. erfüllt, wenn  $|2x_0\delta| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $\delta^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Man wähle sich ein  $\delta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4|x_0|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right\}$ . Damit gilt für alle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $|h| < \delta$ :  $|2hx_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $h^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ , bzw.

$$-\varepsilon < 2hx_0 + h^2 < \varepsilon$$

$$x_0^2 - \varepsilon < (x_0 + h)^2 < x_0^2 + \varepsilon$$

$$f(U_\delta(x_0)) = f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (x_0^2 - \varepsilon, x_0^2 + \varepsilon) = U_\varepsilon(f(x_0))$$

*Begründung.* zu (3)

Bei konstanten Funktionen ist die Definition der Stetigkeit für beliebige  $\delta > 0$  erfüllt.

*Begründung.* zu (4)

Die Funktion  $pr_i$  ist folgenstetig (Lemma 3.1.8) und damit lt. Satz 3.2.4 stetig.

*Beweis.* (zu Satz 3.2.4) Sei  $(x_n)$  eine konvergente Folge in  $(M_1, d_1)$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .

⇒: Vor:  $f(x)$  ist stetig bei  $x_0$

Beh:  $f(x)$  ist folgenstetig bei  $x_0$ :  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir müssen ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  finden mit  $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(x_0))$  ( $n \geq n_0$ ). Wegen der Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $x_0 \exists \delta > 0$  mit  $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$ .

Da  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $\exists n_\delta \in \mathbb{N} : x_n \in U_\delta(x_0)$  ( $n \geq n_\delta$ ) und für  $n_0 := n_\delta$  gilt dann:

$$f(x_n) \in f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)) \quad (n \geq n_0),$$

d.h.  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  bzw.  $f$  ist folgenstetig bei  $x_0$ .

⇐: Vor:  $f(x)$  ist *nicht* stetig bei  $x_0$ :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : f(U_\delta(x_0)) \not\subset U_\varepsilon(f(x_0))$$

Beh:  $f(x)$  ist *nicht* folgenstetig bei  $x_0$ :

$$\exists (x_n) \text{ in } (M_1, d_1) : x_n \rightarrow x_0 \text{ und } f(x_n) \not\rightarrow f(x_0) \text{ in } (M_2, d_2)$$

Da  $f$  nicht stetig in  $x_0$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  für  $\delta = \frac{1}{n} > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  beliebig, so dass  $f(U_{\frac{1}{n}}(x_0)) \not\subset U_\varepsilon(f(x_0))$ , d.h.  $\exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0)$  mit  $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$ . Die so definierte Folge  $(x_n)$  erfüllt:

$$\begin{aligned} d_1(x_0, x_n) < \frac{1}{n} \rightarrow 0, & \quad \text{also } x_n \rightarrow x_0 \\ d_2(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon > 0, & \quad \text{also } f(x_n) \not\rightarrow f(x_0) \end{aligned}$$

Damit ist auch  $f$  nicht folgenstetig in  $x_0$ . □

**3.2.6 Proposition.** Seien  $(M_1, d_1)$  und  $(M_2, d_2)$  metrische Räume,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine Abbildung und  $x_0 \in M_1$ . Dann sind äquivalent:

(1)  $f$  stetig bei  $x_0$

(2) Für jede Umgebung  $U$  von  $f(x_0)$  ist  $f^{-1}(U) = \{x \in M_1 : f(x) \in U\}$  eine Umgebung von  $x_0$ .

**3.2.7 Beispiel.** Sei

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \\ \max\{\frac{1}{q} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Dann ist  $g$  stetig in allen Punkten  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und unstetig in allen Punkten  $x_0 \in \mathbb{Q}$ .

**3.2.8 Proposition.** *Seien  $(M, d)$  ein metrischer Raum und die Abbildungen  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in M$ . Dann sind auch  $(f + g)$  und  $(f \cdot g)$  stetig in  $x_0$ .*

*Begründung.* Folgt aus den Rechenregeln für Folgen (Satz 2.5.1) und Satz 3.2.4.

## 4 Reihen

Reihen sind Folgen der Form

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots,$$

wobei  $(a_n)$  eine Zahlenfolge ist. Das heißt, durch addieren der Glieder einer Folge reeller Zahlen erhält man eine „Reihe“. Die Frage der Konvergenz kann hier ohne Kenntnis des Grenzwertes durch verschiedene Konvergenzkriterien entschieden werden. Viele wichtige Zahlen und Funktionen können durch Reihen beschrieben werden.

### 4.1 Reihen: Definition und einige Eigenschaften

Es ist

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

wobei '=' und '...' noch näher erläutert werden müssen:

Definiert man  $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}}_{\text{endliche Summe}} \in \mathbb{Q}$ , kann '...' durch die Folge

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschrieben werden. Wenn  $(s_n)$  einen Grenzwert besitzt, gilt auch  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

**4.1.1 Definition.** Sei  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $(a_k)_{k \geq n_0}$  eine Folge reeller Zahlen. Wir nennen

$$s_n := \sum_{k=n_0}^n a_k = a_{n_0} + \dots + a_n$$

die **n-te Partialsumme** der Folge  $(a_k)_{k \geq n_0}$ . Die Folge  $(s_n)_{n \geq n_0}$  (auch  $\sum_{k \geq n_0} a_k$ ) wird als **Reihe** der Folge  $(a_k)$  bezeichnet.

Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn ein  $s \in \mathbb{R}$  existiert mit  $s_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es heißt  $s$  die **Summe** der Reihe  $\sum a_k$  und wird mit

$$s = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet.

Mit dieser Definition ist insbesondere erklärt, wann eine Reihe konvergent heißt, nämlich definitionsgemäß, wenn die Folge der Partialsummen (d.h. die Reihe) konvergiert. Da man Reihen oft zum Definieren von Zahlen verwendet, ist es wichtig, etwas über die Konvergenz sagen zu können ohne den Grenzwert der Reihe zu kennen.

**4.1.2 Beispiel.** (1) Für  $a_k = a \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$  ist die Folge  $(s_n)$  mit

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = (n+1)a$$

nicht konvergent, wenn  $a \neq 0$ .

(2) Für  $a_k = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad n_0 = 0$  ist die Folge  $(s_n)$  mit

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

nicht konvergent.

(3) Für  $a_k = \frac{1}{k(k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad n_0 = 1$  ist die Folge  $(s_n)$  konvergent mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

*Begründung.* (Partialbruchzerlegung):

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ist konvergent und  $s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$

(4) **harmonische Reihe**

Für  $a_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad n_0 = 1$  ist die Folge  $(s_n)$  mit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

nicht konvergent.

*Begründung (indirekt).* Angenommen die harmonische Reihe wäre konvergent mit dem Grenzwert  $g \in \mathbb{R}$ . Teilt man die Glieder der Reihe in Brüche mit geraden und ungeraden Nennern auf, erhält man:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$$

bzw.

$$\frac{g}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1},$$

was im Widerspruch steht zu

$$\sum_{k=1, 2 \nmid k}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1, 2 \mid k}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \dots > \frac{1}{2}.$$

(5) **geometrische Reihe**

Für  $a_k = q^k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad n_0 = 0, \quad q \in \mathbb{R}$  ist die Folge  $(s_n)$  mit

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \neq 1.$$

Für  $|q| < 1$  ist  $(s_n)$  konvergent mit  $s_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ , in allen anderen Fällen ist  $(s_n)$  nicht konvergent.

**4.1.3 Definition.** (1) Wir nennen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n a_k =: \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

die **Summe der Reihe**  $\sum_{k \geq n_0} a_k$ , falls die Reihe konvergiert.

(2) Eine Reihe  $\sum_{k \geq n_0} a_n$  heißt **absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k \geq n_0} |a_n|$  konvergiert.

*Bemerkung.* Die Reihe  $\sum \frac{1}{n} (-1)^n$  konvergiert, ist aber nicht *absolut* konvergent, da  $\sum |\frac{1}{n} (-1)^n|$  divergiert (harmonische Reihe).

**4.1.4 Lemma.** Seien  $(a_k)_{k \geq n_0}$  und  $(b_k)_{k \geq n_0}$  Folgen in  $\mathbb{R}$ .

(1)  $\sum_{k \geq n_0} a_k$  konvergent  $\Leftrightarrow \exists n_1 \geq n_0 : \sum_{k \geq n_1} a_k$  konvergent  
 $\Leftrightarrow \forall n_1 \geq n_0 : \sum_{k \geq n_1} a_k$  konvergent

(2) Gilt für  $k \geq n_1 \geq n_0 : |a_k| \leq b_k$  und konvergiert  $\sum_{k \geq n_1} b_k$ , so konvergiert  $\sum_{k \geq n_0} a_k$  absolut. Die Folge  $(b_k)$  wird **Majorante** von  $(a_k)$  genannt (Majorantenkriterium).

(3) Ist  $b_k \geq 0$  für alle  $k \geq n_0$ , so gilt

$$\sum_{k \geq n_0} b_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \left( \sum_{k=n_0}^n b_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt.}$$

(4) Gilt  $a_k \leq b_k \quad \forall k \geq n_0$  und sind  $\sum_{k \geq n_0} a_k, \sum_{k \geq n_0} b_k$  konvergent, so gilt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k.$$

Insbesondere gilt für absolut konvergente Reihen  $\sum_{k \geq n_0} a_k$  die verallgemeinerte Dreiecksungleichung:

$$\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|.$$

Begründung. zu (1)

Die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$  und  $\tilde{s}_n = \sum_{k=n_1}^n a_k$  unterscheiden sich durch eine Konstante:

$$s_n - \tilde{s}_n = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k = \text{const.} \quad \forall n \geq n_1.$$

Es ist also  $\tilde{s}_n = s_n + c$  und damit konvergiert  $(\tilde{s}_n)$  genau dann, wenn  $(s_n)$  konvergiert.

zu (2)

Sei  $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$  und  $\sigma_n = \sum_{k=n_1}^n b_k$ . Da  $(\sigma_n)$  konvergiert, ist  $(\sigma_n)$  eine CAUCHYfolge (Proposition 2.4.15):  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad (n \geq m \geq N)$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left| \sum_{k=n_0}^n a_k - \sum_{k=n_0}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n b_k = |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad (0 \leq |a_k| \leq b_k), \end{aligned}$$

d.h. auch  $(s_n)$  ist eine CAUCHYfolge und somit konvergent (Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ , Proposition 2.4.15).

zu (4)

Folgt aus den "Rechenregeln" für Grenzwerte (Satz (2.5.1)): Unter der Voraussetzung  $b_k \geq 0$  gilt, dass

$$s_n = \sum_{k=n_0}^n b_k \leq s_{n+1} = \sum_{k=n_0}^{n+1} b_k.$$

Die Partialsummen sind also monoton.

$(s_n)$  beschränkt + monoton. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit die Konvergenz von  $(s_n) \implies (s_n)$  beschränkt.

**4.1.5 Lemma.** Es seien  $\sum_k a_k$  und  $\sum_k b_k$  konvergente Reihen sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$(1) \quad \sum_k (a_k + b_k) \quad \text{ist konvergent mit} \quad \sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k$$

$$(2) \quad \sum_k^\infty \lambda a_k = \lambda \sum_k^\infty a_k.$$

*Beweis.* Folgt sofort, wenn man die Rechenregeln für Folgen auf Partialsummen anwendet.  $\square$

## 4.2 Konvergenzkriterien

Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  liefert

**4.2.1 Satz (Cauchy-Kriterium).** Sei  $(a_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall N \leq m \leq n : \\ \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \varepsilon$$

*Beweis.* Klar, denn es gilt

$$|s_n - s_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^n a_k \right|$$

$\square$

**4.2.2 Definition (Notation).** Die Konvergenz von  $\sum_k b_k$  wird abkürzend auch als  $\sum_k b_k < \infty$  geschrieben.

**4.2.3 Satz (Majoranten bzw. Minoranten-Kriterium).** Sei  $(a_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$  sowie  $(b_n)$  in  $[0, \infty)$  und  $|a_n| \leq b_n$ . Dann gilt:

$$\sum_k^\infty b_k < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_k^\infty a_k < \infty$$

Analog folgt für  $a_n \geq b_n$  und  $\sum_n b_n$  divergent, dass auch  $\sum_n a_n$  divergiert.

**4.2.4 Beispiel.** Die Summe  $\sum_n \frac{1}{n^2}$  ist konvergent, weil  $\sum_n \frac{2}{n(n+1)}$  konvergent ist und  $|\frac{1}{n^2}| \leq \frac{2}{n(n+1)}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.2.5 Satz (Reihen mit positiven Gliedern).** Sei  $(b_n)$  Folge in  $[0, \infty)$ . Dann sind Konvergenz und Beschränktheit von  $\sum_n b_n$  äquivalent.

*Beweis.* Wegen  $b_k \geq 0$  ist  $s_n := \sum_k^n b_k$  monoton wachsend. Aus Monotonie und Beschränktheit folgt sofort die Konvergenz.

Andersherum folgt aus der Konvergenz natürlich sofort die Beschränktheit.  $\square$

**4.2.6 Satz (Leibniz-Kriterium).** Ist  $(a_n)$  eine positive Nullfolge in  $\mathbb{R}$ , so ist  $\sum_k (-1)^k a_k$  konvergent.

**4.2.7 Beispiel.** (1) Betrachte:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

(2) Betrachte:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$

*Beweis.* Setze  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$  für  $|x| < 1$ . Dann gilt:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = -\frac{1}{1+x}$$

Das letzte Gleichheitszeichen kann dabei wegen der vorliegenden geometrischen Reihe gesetzt werden. Durch Integration erhält man  $f(x) = -\ln(1+x)$  und also  $f(1) = -\ln 2$ . Allerdings wurden hier Integration und Differentiation ausgenutzt, die noch gar nicht eingeführt sind.  $\square$

Aus dem Majorantenkriterium folgt das Quotientenkriterium:

**4.2.8 Satz (Quotientenkriterium).** Sei  $(a_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$ . Wenn es ein  $0 < \theta < 1$  und  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $a_n \neq 0$  und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \quad \forall n \geq N,$$

so konvergiert  $\sum_n a_n$  absolut.

*Beweis.* Für dieses  $N$  definiere die Folge

$$b_n := |a_N| \theta^{n-N} \quad \text{wobei } n \geq N$$

Mit Induktion folgt dann  $|a_n| \leq |b_n|$ .

Induktionsanfang ( $n = N$ ):  $|a_n| \leq |a_n|$  ist wahr.

Induktionsschritt:

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \theta \leq b_n \theta = b_{n+1}$$

wobei Voraussetzung aus dem Satz, Induktionsvoraussetzung sowie die Definition von  $b_n$  benutzt wurden. Da also die geometrische Reihe  $\sum_k b_k$  eine Majorante für  $\sum_n |a_n|$  ist, muss  $\sum_n a_n$  absolut konvergieren.  $\square$

**4.2.9 Beispiel (Exponentialreihe).** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert

$$\exp(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

absolut. Dazu wende man das Quotientenkriterium an:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{wenn} \quad |x| \leq \frac{n+1}{2}$$

Wähle  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $|x| \leq \frac{N+1}{2}$ . Für dieses  $N$  und  $\theta = \frac{1}{2}$  ist die Bedingung aus dem Quotientenkriterium erfüllt.

**4.2.10 Definition.** Wir nennen

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) \quad \text{die \textbf{Eulersche Zahl} und ist } \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

**4.2.11 Beispiel.** Für  $a_n = \frac{1}{n}$  ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} < 1$$

Dennoch folgt daraus nicht, dass  $\sum_n a_n$  konvergiert, denn es gibt eben kein festes  $0 < \theta < 1$ , mit dem die Bedingung aus dem Quotientenkriterium erfüllt ist, weil  $\frac{n}{n+1}$  gegen 1 konvergiert.

**4.2.12 Satz (Wurzel-Kriterium).** Sei  $(a_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$ . Es gebe  $0 < \theta < 1$  und  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \quad \text{wenn } n \geq N.$$

Dann konvergiert  $\sum_n a_n$  absolut.

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist eine geometrische Reihe Majorante für  $\sum_n |a_n|$  und somit absolut konvergent, denn es gilt

$$\sum_n |a_n| \leq \sum_n \theta^n$$

□

## 4.3 Die realen Zahlen: Dezimalbrüche

**4.3.1 Definition.** Ein **Dezimalbruch**  $\pm a_0 a_1 \dots a_l, a_{l+1} \dots$  ist eine Reihe der Form

$$z = \pm \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{l-k} \quad \text{mit} \quad a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

**4.3.2 Beispiel.** (1)  $42 = 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

$$(2) 0, \bar{9} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

**4.3.3 Proposition.** *Jeder Dezimalbruch konvergiert und stellt eine reelle Zahl dar.*

*Beweis.* Man wende Majorantenkriterium und eine geometrische Reihe an.  $\square$

**4.3.4 Satz.** *Sei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$  und  $(b_n)$  Folge in  $(0, \infty)$  mit  $b_n \rightarrow 0$  und  $b_0 > x$ . Dann gibt es eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{N}_0$  mit  $a_n b_n < b_{n-1}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und es existiert  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ .*

**Bild:**



(Hier wäre  $a_1 = 1$ ,  $x_1 = b_1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $x_2 = x_1$ ,  $a_3 = 1$ ,  $x_3 = b_1 + b_3$  usw.)

*Beweis.* Wir definieren  $a_n$  und  $x_n$  rekursiv durch  $a_1 := \max\{k : kb_1 \leq x\} < \infty$  nach dem Archimedischen Prinzip sowie  $x_1 = a_1 b_1$ . Sind  $a_1 \dots a_n$  und  $x_1 \dots x_n$  schon gewählt, definiere  $a_{n+1} := \max\{x_n + kb_{n+1} \leq x\}$  sowie  $x_{n+1} := x_n + a_{n+1} b_{n+1}$ . Es folgt  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x$  und  $x_n + b_n > x$ . Damit ist  $x_n \leq x < x_n + b_n$ . Also gilt  $|x - x_n| \leq b_n$ , und wegen  $b_n \rightarrow 0$  folgt  $x_n \rightarrow x$ .  $\square$

**4.3.5 Korollar.** *Jede reelle Zahl ist als Dezimalbruch darstellbar, d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$  gibt es  $l \in \mathbb{N}$  sowie  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  mit*

$$x = a_0 \dots a_l, a_{l+1} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{l-k}$$

*Beweis.* Es gibt  $l \in \mathbb{N}$  mit  $x < 10^l$ . Definiere  $b_n := 10^{l-n}$ . Dann folgt nach dem letzten Satz die Existenz einer Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{N}_0$  mit  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  und  $a_n b_n < b_{n-1}$ . Da  $\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{10^{l-(n-1)}}{10^{l-n}} = 10$ , ist  $a_n < 10$ . Damit  $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Also ist  $x$  Dezimalbruch.  $\square$

*Bemerkung.* Die Basis 10 hat keine ausgezeichnete Rolle. Stattdessen können beliebige  $b > 1$  zugelassen werden und jede Zahl besitzt eine eindeutige b-adische Darstellung. Von besonderer Bedeutung sind  $b = 2$  (Dualzahlen). Dabei sind die Ziffern stets in  $\{0, \dots, b-1\}$ .

**4.3.6 Beispiel (Dualzahlen).**

$$\begin{aligned} 10,00110 &= 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + \\ &1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} = 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 2\frac{3}{16} \end{aligned}$$

Abgesehen von  $b = 2$  spielen noch  $b = 8$  (Oktalzahlen) sowie  $b = 16$  (Hexadezimalzahlen) eine besondere Rolle.

## 4.4 Manipulation von Reihen

Zunächst stellt sich die Frage:

Darf man Summanden einer Reihe vertauschen (Kommutativität)?

Manchmal, aber nur manchmal!

**Gegenbeispiel:** Wir betrachten die Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots = 0$$

Nun benötigen wir folgende Definition:

**4.4.1 Definition.** Ist  $\sum_{n \geq 0} a_n$  eine Reihe und  $\tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bijektiv, so heißt  $\sum_{n \geq 0} a_{\tau(n)}$  eine **Umordnung** von  $\sum a_n$ .

Weiter im Beispiel: Nach der Umordnung erhalten wir

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)}_{\text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ so daß } \geq 2} - 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}_{\text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ so daß } \geq 1} - \frac{1}{2} + \dots$$

Die so umgeordnete Reihe ist divergent (unendlich großer Summenwert).

**4.4.2 Satz.** Sei  $\sum a_n$  absolut konvergent mit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ . Dann ist jede Umordnung dieser Reihe ebenfalls absolut konvergent mit der selben Summe.

**4.4.3 Satz.** (Riemannscher Umordnungssatz). Ist  $\sum a_n$  konvergent, aber nicht absolut konvergent, so gibt es zu jeder Zahl  $s \in \mathbb{R}$  eine Umordnung

$$\sum_{n \geq 0} a_{\tau(n)} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = s.$$

Des weiteren gibt es divergente Umordnungen.

*Beweis.* (Idee). Wir setzen

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{falls } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad a_n^- = \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{falls } a_n > 0. \end{cases}$$

Anschließend argumentiert man wie folgt:

$$\begin{cases} \sum a_n \text{ nicht absolut konvergent und} \\ \sum a_n \text{ ist konvergent} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_n^+ \text{ divergent } (+\infty) \\ \sum a_n^- \text{ divergent } (-\infty). \end{cases}$$

□

Wir wenden uns nun einer etwas anderen Fragestellung zu. Sei  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  für  $i, j \in \mathbb{N}_0$ . Gilt dann folgendes?

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

Auch hier kann man diese Frage nur manchmal mit ja beantworten.

**4.4.4 Satz.** Sei  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $i, j \in \mathbb{N}_0$ . Es existiere eine Konstante  $M \geq 0$  mit der Eigenschaft, daß  $\sum_{i,j=0}^m |a_{i,j}| \leq M$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Dann folgt:

(1) Ist  $\tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  injektiv, so ist die Reihe  $\sum_{n \geq n_0} a_{\tau(n)}$  absolut konvergent.

Insbesondere sind sowohl die Zeilenreihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$  für jedes  $j$  als auch die Spaltenreihen  $\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$  für jedes  $i$  absolut konvergent.

(2) Die beiden Reihen  $\sum_{i \geq 0} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \right)$  und  $\sum_{j \geq 0} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \right)$  sind absolut konvergent.

Ferner gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^k a_{k-l,l} \right)}_{\text{Diagonalsumme}}.$$

**4.4.5 Korollar.** (Cauchy-Produkt). Sind die beiden Reihen  $\sum_{i \geq 0} a_i$  und  $\sum_{j \geq 0} b_j$  absolut konvergent, dann gilt

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j \right).$$

Das mittlere Produkt heißt Cauchy-Produkt.

*Beweis.* Wähle  $a_{i,j} = a_i b_j$  und wende Aussage b) des letzten Satzes an.  $\square$

## 4.5 Die Exponentialfunktion

Die Definitionen und Kriterien für Reihen übertragen sich ohne Schwierigkeiten auf komplexe Reihen. Sei dazu  $(c_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt  $\sum_{k=n_0}^n c_k$   $n$ -te Partialsumme

und

$$\sum_{k \geq n_0} c_k = \left( \sum_{k=n_0}^n c_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

wird als Reihe der Folge  $(c_k)$  bezeichnet.

Konvergenz und absolute Konvergenz sind wie für reelle Reihen definiert. Komplexe Folgen konvergieren genau dann, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren.

$$\operatorname{Re} \{c_n\} =: a_n, \quad \operatorname{Im} \{c_n\} =: b_n$$

$$\sum_{k \geq n_0} c_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k \geq n_0} a_k \text{ konvergiert} \wedge \sum_{k \geq n_0} b_k \text{ konvergiert}$$

mit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} c_k = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k + i \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$$

und

$$\overline{\left( \sum_{k=n_0}^{\infty} c_k \right)} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \bar{c}_k.$$

**4.5.1 Definition.** Die **komplexe Exponentialfunktion** wird definiert durch

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) (= e^z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Absolute Konvergenz für beliebige  $z \in \mathbb{C}$  (wie im Reellen) folgt aus dem Quotientenkriterium.

**4.5.2 Satz.**

(1) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.

(2) Es gilt:  $\left| \exp(z) - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$  für  $|z| \leq \frac{N+1}{2}$

(3) Die Exponentialfunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(z + \tilde{z}) = \exp(z) \cdot \exp(\tilde{z}) \quad \forall z, \tilde{z} \in \mathbb{C}.$$

*Bemerkung.* Aus der linearen Algebra ist bekannt:

**Produktzeichen:**  $\prod_{j=m}^n a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$  ( und  $\prod_{j=m}^{m-1} a_j := 1$  )

Durch  $\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$  werden die **Binomialkoeffizienten** definiert.

**Lemma:**

(1) Es gilt  $\binom{n}{k} = 0$  falls  $k > n$  und  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ .

(2)  $\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge.

(3) Für  $1 \leq k \leq n$  gilt:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

Hiermit erhält man wieder mit einer einfachen Induktion den folgenden Satz:

**4.5.3 Satz (Binomischer Lehrsatz).** Für  $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  ist

$$(z + \tilde{z})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \tilde{z}^{n-k}$$

*Beweis.* Vollständige Induktion □

*Beweis.* (Satz 4.5.2 über die Exponentialfunktion)

(1) Stetigkeit

a) bei  $z_0 = 0$ : Fehlerabschätzung für  $N = 0$  ( $\exp(0) = 1$ ):

$$|\exp(z) - 1| \leq 2 \cdot |z|$$

Um die Stetigkeit zu zeigen, wähle man  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  für ein  $\varepsilon > 0$ :

$$|z - 0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\exp(z) - \underbrace{\exp(0)}_{=1}| \leq 2 \cdot |z| < 2\delta = \varepsilon$$

Also ist  $\exp$  stetig.

b) Sei nun  $z_0 \in \mathbb{C}$  beliebig. Ist  $(z_n)$  Folge in  $\mathbb{C}$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ , so muss  $\exp(z_n) \rightarrow \exp(z_0)$  gezeigt werden. Das gilt aber, da

$$\exp z_n = \exp(z_n - z_0 + z_0) = \exp(z_n - z_0) \exp(z_0) \rightarrow \exp(z_0),$$

weil  $\exp(z_n - z_0) \rightarrow 0$ , denn  $\exp$  ist nach (a) stetig in 0.

(2) Fehlerabschätzung: Für  $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$  sowie  $n \geq N$  ist

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{|z|}{N+1} \leq \frac{1}{2}$$

Durch Induktion erhält man

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right| \dots \leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} 2^{N+1-n} \quad \text{für } n \geq N+1$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} 2^{N+1-n} \\ &= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{N+1-n} = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \end{aligned}$$

(3) Funktionalgleichung : Durch "Ausrechnen":

$$\begin{aligned}
 \exp(z) \cdot \exp(\tilde{z}) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{z}^j}{j!} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^k \frac{z^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{\tilde{z}^l}{l!} \right) \quad (\text{Cauchy-Produkt (4.4.5)}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{l=0}^k \frac{k!}{(k-l)!l!} \cdot z^{k-l} \tilde{z}^l \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} z^{k-l} \tilde{z}^l \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z + \tilde{z})^k \quad \begin{array}{l} \text{nach Binomischem} \\ \text{Lehrsatz (4.5.3)} \end{array} \\
 &= \exp(z + \tilde{z})
 \end{aligned}$$

□

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion halten wir in folgendem Korollar fest:

#### 4.5.4 Korollar.

- (1)  $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(z) \neq 0$
- (2)  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$
- (3)  $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = e^n$
- (4)  $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  ist streng monoton
- (5)  $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ ,  $z \in \mathbb{C}$
- (6)  $|\exp(it)| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$

*Beweis.*

- (1)  $1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \exp(-z)$   
 $\Rightarrow \exp(z) \neq 0$ ,  $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- (2)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$  :  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1$   
Für  $x < 0$  ist  $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$
- (3)  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exp(n) = \exp(1 + \dots + 1) = \exp(1) \dots \exp(1) = e^n$

(4) Sei  $y > x \Rightarrow \exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \exp(y - x) > \exp(x)$

$$(5) \overline{\exp(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$$

(6) Für  $t \in \mathbb{R}$  ist  $1 = \exp(it - it) = \exp(it) \exp(-it) = \exp(it) \exp(\overline{it}) = \exp(it) \exp(it) = |\exp(it)|^2$

□

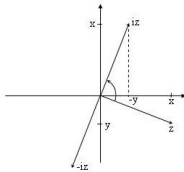
 $e^{it}$ 

$e^{i0}$  Frage: Was macht  $e^{it}$ , wenn  $t$  die reellen Zahlen durchläuft?  
Antwort:  $e^{it}$  läuft gegen den Uhrzeigersinn mit  $|\text{Geschwindigkeit}| = 1$ .

**4.5.5 Satz.** Für  $t \geq 0$  erhält man  $\exp(it) = e^{it}$ , indem man von 1 aus startend *entgegen im* Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis die Bogenlänge  $|t|$  abträgt.

*Beweis.*

(a)  $z \mapsto iz$  ist Drehung um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn.



$z \mapsto -iz$  ist Drehung um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn. Für  $z = x + iy$  ist  $iz = -y + ix$ .

(b) Für  $0 < s < 1$  liegt  $e^{i(t+s)}$  auf dem Viertelkreis, der  $e^{it}$  gegen den Uhrzeigersinn folgt  $e^{i(t+s)}$ , falls  $s \in (0, 1)$ . Sei dazu  $e^{is} = a + ib$ .

$$\begin{aligned} e^{is} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(is)^k}{k!}, \quad (i^{2k} = (-1)^k, i^{2k+1} = (-1)^k i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(is)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(is)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4!} - \frac{s^6}{6!} + \dots\right) + is \left(1 - \frac{s^2}{3!} + \frac{s^4}{5!} - \frac{s^6}{7!} + \dots\right) \\ &\Rightarrow e^{is} = a + ib \quad \text{mit } a > 0, b > 0 \quad \text{für } 0 < s < 1 \\ e^{i(s+t)} &= e^{is} e^{it} = (a + ib) e^{it} = a e^{it} + i b e^{it}, \quad |a|^2 + b^2 = 1 \end{aligned}$$

$e^{it}$  bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn.

- (c)  $L_4$   $L_3$   $L_2$  Länge des Bogens von 1 bis  $e^{it}$  (mit Umläufen gerechnet) ist  $|t|$ , für  $t > 0$ .
- $L_1$  Berechne:  $L_n(t) =$  Länge des Polygonzuges  $(1, e^{i\frac{2t}{n}}, \dots, e^{i\frac{nt}{n}})$
- Idee:  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(t)$  ist die gesamte Bogenlänge.

$$\begin{aligned}
 L_n(t) &= |e^{i\frac{t}{n}} - 1| + |e^{i\frac{2t}{n}} - 1| + \dots + |e^{i\frac{n-1}{n}t}| \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{k+1}{n}t} - e^{i\frac{k}{n}t}| \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{k}{n}t} e^{i\frac{1}{n}t} - e^{i\frac{k}{n}t}| \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{k}{n}t} (e^{i\frac{1}{n}t} - 1)| \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |e^{i\frac{k}{n}t}| |e^{i\frac{1}{n}t} - 1| = n |e^{i\frac{1}{n}t} - 1| \\
 &= |t| \left| \frac{e^{i\frac{1}{n}} - 1}{\frac{t}{n}} \right| \rightarrow |t|
 \end{aligned}$$

□

**4.5.6 Lemma.** Für  $z_n \rightarrow 0$ ,  $z_n \neq 0 \Rightarrow \frac{e^{z_n} - 1}{z_n} \rightarrow 1$ , was sich auch als  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^{0+n} - e^0}{n} = 1$  schreiben lässt.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 e^z - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 \Rightarrow \frac{e^z - 1}{z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \\
 \Rightarrow \frac{e^z - 1}{z} - 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} + 1 - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}
 \end{aligned}$$

Mit  $k = n - 2$  folgt

$$\frac{e^z - 1}{z} - 1 = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| &\leq |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k+2)!} \\ &\leq |z| \exp(|z|) \end{aligned}$$

Für  $z_n \rightarrow 0$  folgt also:

$$\left| \frac{e^{z_n} - 1}{z_n} - 1 \right| \leq |z_n| \exp(|z_n|) \rightarrow 0$$

□

**4.5.7 Definition.**  $\pi := \frac{1}{2}$  ist der **Umfang des Einheitskreises**.

**4.5.8 Satz.**

- (1)  $e^{i\pi} = -1, e^{2\pi i} = 1$
- (2) Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$  hat die Form  $z = e^{it}$  mit  $t \in \mathbb{R}$  ( $t \in [0, 2\pi)$  eindeutig).
- (3) Ist  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so folgt  $|z| =: r > 0$  und  $|\frac{z}{r}| = 1$ . Damit  $\frac{z}{r} = e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in \mathbb{R}$  und jedes  $z \in \mathbb{C}$  lässt sich schreiben als  $z = re^{i\varphi}$  mit  $r = |z|$  und  $\varphi =: \arg(z)$  (Argument von  $z$ ). Dies liefert die geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen als Winkeladdition:

$$z\tilde{z} = |z||\tilde{z}|e^{i\varphi}e^{i\tilde{\varphi}} = |z||\tilde{z}|e^{i(\varphi+\tilde{\varphi})}$$

**4.5.9 Korollar.** Für  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist  $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Mit anderen Worten  $t \mapsto e^{it}$  ist  $2\pi$ -periodisch bzw. die komplexe  $e$ -Funktion ist periodisch mit Periode  $2\pi i$ .

**4.5.10 Definition (Winkelfunktionen).** Wir definieren die **Winkelfunktionen**  $\cos \varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$  sowie  $\sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}$ .

Da  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \tilde{z})$ ,  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \tilde{z})$  folgen

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \end{aligned} \right\} \text{Eulersche Formeln}$$

Benutze  $i^{2k} = (-1)^k$ ,  $i^{2k+1} = i(-1)^k$  um die Parameterdarstellung von  $\cos$  und  $\sin$  zu erhalten:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!}}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} \\ \sin \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

## 5 Stetige reelle Funktionen

Wir betrachten auf  $\mathbb{R}$  stets die übliche Metrik  $d(x, y) = |x - y|$ . Aus Kapitel 3 wissen wir, was Stetigkeit bedeutet.

### 5.1 Grenzwerte von Funktionen

Wir beginnen mit

**5.1.1 Beispiel.** (1)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  sowie  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

(2)  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^x$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$   $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

(3)  $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existiert nicht;  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$

Bei diesen Definitionen macht das  $\infty$  Schwierigkeiten, dazu:

#### 5.1.2 Definition.

(1) Sei  $(x_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$ , wir sagen  $x_n$  ist **bestimmt divergent gegen**  $+\infty$ , in Zeichen  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \infty$  oder  $x_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , wenn

$$\forall R > 0 \quad \exists n_R \in \mathbb{N} : x_n \geq R \quad \forall n \geq n_R$$

Entsprechend heißt  $x_n$  **bestimmt divergent gegen**  $-\infty$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = +\infty$ .

Notation:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = -\infty$

Beispiel:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

(2) Sei  $D \subset \mathbb{R}$ , dann heißt  $\overline{D} = \{x \in \mathbb{R} : \exists (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow x\}$  **Abschluss** von  $D$ .

(Beispiel:  $(\overline{0,1}) = [0,1]$  )

(3) Sei  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D} \cup \{\pm\infty\}$ . Wir sagen  $f(x) \rightarrow y_0$  für  $x \rightarrow x_0$  wenn  $\forall (x) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow x_0; f(x) \rightarrow y_0$  ( $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ )

Damit gilt für Beispiel (5.1.1).

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1, \quad g(x) \rightarrow +\infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existiert nicht, da verschiedene Teilfolgen in  $(0, \infty)$  unterschiedliche Grenzwerte besitzen.

**5.1.3 Proposition.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $D \subset \mathbb{R}$ .

(1) Ist  $x_0 \in D$ , so gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f(x_0) = y_0$  und  $f$  ist stetig bei  $x_0$

(2) Ist  $x_0 \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$  Es existiert Fortsetzung  $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  und  $g$  stetig bei  $x_0$  mit  $g(x_0) = y_0$ .

*Beweis.*

(1) " $\Rightarrow$ " Wegen konstanter Folge  $(x_0)$  ist  $y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f(x_0) = y_0$ .  
Folgenstetigkeit  $\Rightarrow$  (metr. Räume) Stetigkeit

" $\Leftarrow$ "  $f$  stetig bei  $x_0 \Rightarrow f$  folgenstetig bei  $x_0$

(2) " $\Rightarrow$ " folgt aus 1.

$$\text{"}\Leftarrow\text{" definiere } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ y_0 & \text{für } x_0 \\ 42 & \text{für } x_0 \in \overline{D} \setminus (D \cup \{x_0\}) \end{cases}$$

für  $f(x) \rightarrow y_0$  folgt  $(x \rightarrow x_0)$ :

$\forall (x_n)$  in  $\overline{D}$  mit  $x_n \rightarrow x_0 : g(x_n) \rightarrow g(x_0) = y_0$

$\Rightarrow g$  folgenstetig  $\Rightarrow$  (metr. Raum)  $g$  stetig bei  $x_0$

□

**5.1.4 Proposition.**

(1) Für  $(x_n)$  in  $(0, \infty)$ :  $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$

(2)  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad \text{bzw.} \tag{5.1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \tag{5.2}$$

*Beweis.* Gleichung (5.1) und Gleichung (5.2) sind äquivalent.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x^k} &= \frac{1}{x^k} \left( \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{x^{i-k}}{i!} + \frac{x}{(k+1)!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{x^{j-k}}{j!} \geq \frac{x}{(k+1)!} \quad \text{für } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{und } \frac{x}{(k+1)!} \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad \text{damit ist auch } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$$

(Normale Rechenregel für bestimmt divergente Folgen.) □

## 5.2 Der Zwischenwertsatz

**5.2.1 Satz (Zwischenwertsatz).** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f(I)$  ein Intervall.

Äquivalentes Korollar:

**5.2.2 Korollar.** Sei  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) \leq f(b)$ . Dann gibt es  $\forall \xi \in [f(a), f(b)]$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = \xi$ . (Dies folgt sofort aus dem Satz und umgekehrt)

*Beweis.* Sei

$$\begin{aligned} y_- &= \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ y_+ &= \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{aligned}$$

Wir zeigen  $(y_-, y_+) \subset f(I) \subset [y_-, y_+] \cap \mathbb{R} \Rightarrow f(I)$  ist Intervall.

Wähle  $y \in (y_-, y_+)$  für  $y_- < y_+$  (somit trivial) und  $(x_-, x_+) \subset I \subset [x_-, x_+]$ .

$$\begin{aligned} A_- &:= \{x \in I : f(x) < y\} \\ A_+ &:= \{x \in I : f(x) > y\} \end{aligned}$$

Damit gilt:  $A_- \cap A_+ = \emptyset$  und  $A_- \cup A_+ = I$ . Weil  $f$  stetig ist, ist  $A_-$  offen und  $A_- \neq \emptyset$  (somit wäre  $\inf(I) = y_- = y$ )

analog ist  $A_+ \neq \emptyset$ ,  $A_+$  ist offen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $A_+ \cap \{\xi \in \mathbb{R} : \xi > x\} \neq \emptyset$

Behauptung:  $f(\bar{x}) = y$

Da  $\bar{x} = \inf(A_+ \cap (x, \infty))$  gibt es  $(x_n)$  in  $A_+ \cap (x, \infty)$  mit  $x_n \rightarrow \bar{x}$  und  $A_+ \cap (x, \infty)$  offen.

$$(1) \Rightarrow f(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq y \text{ mit } f(x_n) > y, \text{ da } x_n \in A_+$$

$$(2) \bar{x} - \frac{1}{n} \in A_- \text{ ist für } n \text{ groß genug und damit}$$

$$f(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(\bar{x} - \frac{1}{n})) \leq y$$

Aus 1. und 2. folgt  $f(\bar{x}) = y$  □

**5.2.3 Beispiel.**  $\forall a \geq 0, n \in \mathbb{N}$  gibt es genau ein  $W_a^k$  mit  $(W_a^k)^k = a, W_a^k =: a^{\frac{1}{k}}$

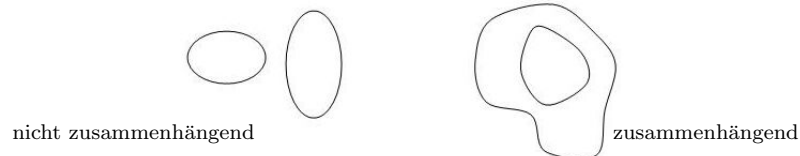
*Begründung.* Betrachte  $f(x) = x^k$  auf  $[0, \infty)$ ,  $f(0) = 0$  und  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty \Rightarrow f([0, \infty)) = [0, \infty)$  nach dem Zwischenwertsatz. D.h.  $\forall a \geq 0$  gibt es ein  $x$  mit  $x^k = a$ . Da  $f$  streng monoton auf  $[0, \infty)$  ist  $x$  eindeutig.

Eigentlich steht hinter dem Zwischenwertsatz (5.2.1) ein allgemeines Prinzip (stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend) und konkrete Aussagen über  $\mathbb{R}$ : (zusammenhängende Mengen in  $\mathbb{R}$  sind Intervalle).

**5.2.4 Definition.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum

(1)  $M$  heißt **zusammenhängend**, wenn jede Zerlegung von  $M$  in offene, disjunkte Mengen trivial ist, d.h.  $[U, V$  offen,  $U \cap V = \emptyset$  und  $U \cup V = M \Leftrightarrow U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset]$ .

(2)  $X \subset M$  heißt **zusammenhängend**, wenn  $(X, d)$  zusammenhängen.



**5.2.5 Beispiel.** (1)  $[0, 1) \cup (2, 3]$  nicht zusammenhängend in  $\mathbb{R}$ .

(2) Alle Intervalle sind zusammenhängend.

Der folgende Satz ist einfach zu beweisen, aber wichtig:

**5.2.6 Satz.** Seien  $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$  metrische Räume,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  stetig,  $X \subset M_1$ , zusammenhängend  $\Rightarrow f(X) \subset M_2$  ist zusammenhängend.

Das nächste Resultat ist natürlich wieder eine Konsequenz aus der Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen:

**5.2.7 Satz.**  $M \subset \mathbb{R}$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $M$  ein Intervall ist.

## 5.3 Kompaktheit

Kompaktheit ist ein fundamentaler Begriff. Sehr viele Existenzsätze (z.B. Existenz von Lösungen gewisser Differentialgleichungen) gründen sich auf Kompaktheit in geeigneten Räumen.

**5.3.1 Definition.** Sei  $(M, d)$  metrischer Raum,  $K \subset M$ .

- (1) Eine **offene Überdeckung** von  $K$  ist eine Familie  $(U_l)_{l \in I}$  offener Mengen, wobei  $I$  beliebige Indexmenge, mit

$$\bigcup_{l \in I} U_l \supset K,$$

d.h.  $\forall x \in K \exists l \in I : x \in U_l$ .

- (2)  $K$  heißt **kompakt**, wenn für jede offene Überdeckung  $(U_l)_{l \in I}$  von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. wenn es für jede offene Überdeckung  $(U_l)_{l \in I}$  von  $K$  endlich viele  $l_1, l_2, \dots, l_n \in I$  gibt mit

$$U_{l_1} \cup U_{l_2} \cup \dots \cup U_{l_n} \supset K.$$

**5.3.2 Beispiele. (Kompakte Mengen in  $\mathbb{R}$ )**

**5.3.3 Beispiele. (Nichtkompakte Mengen)**

**5.3.4 Definition.** Total beschränkt

**5.3.5 Lemma.** *Total beschränkt*

**5.3.6 Lemma.** Sei  $(M, d)$  metrischer Raum,  $H \subset M$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $H$  ist total beschränkt.
- (2) Jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in H (n \in \mathbb{N})$  besitzt eine Teilfolge, die Cauchyfolge ist.

**5.3.7 Satz.** Sei  $(M, d)$  metrischer Raum,  $K \subset M$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $K$  ist kompakt.
- (2)  $K$  ist total beschränkt und vollständig.
- (3)  $K$  ist folgenkompakt, d.h. jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in K (n \in \mathbb{N})$  besitzt eine in  $K$  konvergente Teilfolge  $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ :

$$\forall (x_n) \in K \exists \text{ Teilfolge } (x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \text{ von } (x_n) \text{ mit } x_{n_j} \rightarrow x, x \in K, j \rightarrow \infty$$

Unter Verwendung des Satzes (2.4.12) von Bolzano-Weierstraß folgt:

**5.3.8 Satz.** Sei  $K \subset \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $K$  ist kompakt.
- (2)  $K$  ist abgeschlossen und beschränkt.

*Beweis.* (Wir verwenden Folgenkompaktheit):

(1)  $\Rightarrow$  (2) Sei  $K$  kompakt. Zu zeigen:  $K$  ist abgeschlossen. (Erinnerung: d.h.  $K^c$  ist offen.  $\Leftrightarrow$  Für jede konvergente Folge  $(x_n)$  mit  $(x_n)$  in  $K$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in K$ ). Sei also  $(x_n)$  eine Folge in  $K$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Da  $K$  kompakt  $\Rightarrow \exists (x_{n_j})$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = y \in K$ . Da  $x_n \rightarrow x$ , muss auch  $x_{n_j} \rightarrow x \Rightarrow x = y \in K$ .  $K$  ist beschränkt, sonst gäbe es  $(x_n)$  in  $K$  mit  $|x_n| > n$ . Diese Folge besitzt garantiert keine konvergente Teilfolge. (Jede Teilfolge ist unbeschränkt).

(2)  $\Rightarrow$  (1) Zeige:  $K$  ist folgenkompakt. Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $K$ ; da  $K$  beschränkt ist, ist  $(x_n)$  beschränkt.  $\Rightarrow$  (Satz (2.4.12) von Bolzano-Weierstraß)  $\exists$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Da  $K$  abgeschlossen ist, ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$ .

□

**5.3.9 Beispiel.**  $M \neq \emptyset$  mit der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{x\} = U_{\frac{1}{2}}(x)$  ist offen. Damit gilt:  $U \subset M$  ist kompakt  $\Leftrightarrow U$  ist endlich. ( $\Rightarrow (U_x)_{x \in K}, U_x = \{x\}$ ).  $\neq K$  abgeschlossen und beschränkt. In  $M$  sind alle Mengen abgeschlossen und beschränkt.

**5.3.10 Satz.** Seien  $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$  metrische Räume,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  stetig und  $K \subset M_1$  kompakt. Dann ist auch  $f(K)$  kompakt. "Das stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt."

*Beweis.* Wieder über Folgenkompaktheit:

Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(K)$ . Wähle  $x_n \in K$  mit  $y_n = f(x_n)$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in K$ . Mit der Stetigkeit von  $f$  folgt  $f(x_{n_k}) =: y_n \rightarrow f(x) \in f(K)$ . Damit:  $f(K)$  folgenkompakt. □

**5.3.11 Korollar.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $K \subset M$  kompakt. Dann ist  $f$  auf  $K$  beschränkt und nimmt sein Maximum und Minimum an. D.h. es gibt  $x_{\max} \in K, x_{\min} \in K$  mit

$$\begin{aligned} f(x_{\max}) &= \sup\{f(x) : x \in K\} = \max\{f(x) : x \in K\} && \text{ sowie} \\ f(x_{\min}) &= \inf\{f(x) : x \in K\} = \min\{f(x) : x \in K\} \end{aligned}$$



*Beweis.* Nur für das Maximum:

$f(K)$  ist nach (5.3.10) eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , also beschränkt. Sei  $s := \sup f(K)$ : da  $s$  das Supremum ist, existiert  $(s_n)$  in  $f(K)$  mit  $s_n \rightarrow s$ , da  $s_n \in f(K)$  gibt es  $x_n \in K$  mit  $f(x_n) = s_n$ .

Da  $K$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(x_{nk})$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk} = x \in K$ .  $\Rightarrow$  ( $f$  stetig)  $f(x_{nk}) = s_{nk} \rightarrow f(x) = s$ . Damit ist  $x$  das gesuchte  $x_{\max}$ .  $\square$

### 5.3.12 Beispiel.

(1)  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist stetig,  $f(0, 1) = (1, \infty)$  nicht beschränkt. Minimum wird nicht angenommen.

(2)  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x$  ist stetig,  $g((0, 1)) = (0, 1)$  beschränkt, aber nimmt auf  $(0, 1)$  weder Supremum noch Infimum an.

**5.3.13 Korollar.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f(I)$  ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall.

## 5.4 Umkehrfunktionen, Stetigkeit und allgemeine Potenzen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Inverse streng monoton stetiger Funktionen wieder stetig ist.

Ist  $f : A \rightarrow B$  bijektiv, so gibt es für jedes  $b \in B$  genau ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$ . Wir schreiben  $a = f^{-1}(b)$  und  $f^{-1} : B \rightarrow A$  heißt **Umkehrabbildung** oder **Inverse** von  $f$ .

In  $\mathbb{R}$  erhält man Injektivität (stetiger) Funktionen durch Monotonie:

**5.4.1 Definition.** Für  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $f$  heißt **monoton steigend** genau dann, wenn **fallend**

$$\Leftrightarrow \forall x, \tilde{x} \in D, \quad \tilde{x} > x : \begin{array}{l} f(\tilde{x}) \geq f(x) \\ f(\tilde{x}) \leq f(x) \end{array}$$

gilt. Eine Funktion heißt **streng monoton fallend** bzw. **steigend**, wenn sie monoton fallend bzw. steigend ist und injektiv ist (d.h.  $\forall x, \tilde{x} \in D, \quad \tilde{x} > x : f(\tilde{x}) < f(x)$ ).

$f$  ist **monoton**, genau dann wenn  $f$  monoton steigend oder monoton fallend ist.

$f$  ist **streng monoton**, genau dann wenn  $f$  streng monoton fallend oder steigend ist.

**5.4.2 Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton. Dann ist  $f$  injektiv,  $f(I) =: J \subset \mathbb{R}$  ist ein Intervall, und  $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton und stetig.

*Beweis.*

(1) ohne Einschränkung:  $f$  ist streng monoton steigend.

$f$  ist injektiv, da streng monoton;  $f(I) = J$  ist nach dem Zwischenwertsatz (5.2.1) zusammenhängend und also ein Intervall:  $f : I \rightarrow J$  ist also bijektiv. Wir zeigen nun:  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ist streng monoton steigend: Für  $y < \tilde{y}$  werde  $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(\tilde{y})$  angenommen. Durch Anwendung von  $f$  erhält man:

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(\tilde{y})) = \tilde{y}$$

(2) Bleibt zu zeigen:  $f^{-1}$  ist stetig. Wähle dazu  $y_0 \in J$ ,  $\varepsilon > 0$ . Gesucht wird ein  $\delta > 0$  mit

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |y - y_0| < \delta$$

- $x_0$  liegt nicht im Rand von  $I$ , d.h.  $\exists \tilde{\varepsilon} > 0$  mit  $[x_0 - \tilde{\varepsilon}, x_0 + \tilde{\varepsilon}] \subset I$ .  
Ohne Einschränkung:  $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ . Setze  $y_1 = f(x_0 - \tilde{\varepsilon})$ ,  $y_2 = f(x_0 + \tilde{\varepsilon}) \Rightarrow$  ( $f$  streng monoton)  $y_1 < y_0 < y_2$ . Damit gibt es  $\delta > 0$  mit  $y_1 < y_0 - \delta < y_0 + \delta < y_2$ . Dieses  $\delta$  tut's!  
 $f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subset f^{-1}((y_1, y_2)) = (x_0 - \tilde{\varepsilon}, x_0 + \tilde{\varepsilon}) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
- $x_0$  ist linker Randpunkt:  $(x_0, x_0 + \tilde{\varepsilon}) \dots$  weiter wie vorher
- $x_0$  ist rechter Randpunkt: wie 2.

□

**5.4.3 Definition (Folgerung).** Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton steigend und stetig mit Wertebereich  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . Die Umkehrfunktion  $\exp^{-1} =: \ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton steigend und stetig. Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

*Beweis.* Strenge Monotonie, Stetigkeit und  $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$  wurden schon gezeigt. Für  $x \rightarrow \infty$  geht  $\exp(x) \rightarrow \infty$ . Für  $x \rightarrow -\infty$  ist

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \inf(\exp(\mathbb{R})) = 0 \\ \sup(\exp(\mathbb{R})) = \infty. \end{cases}$$

Nach dem Zwischenwertsatz (5.2.1) ist dann  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . □

**5.4.4 Definition.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^k$  ist streng monoton. Die stetige **Umkehrfunktion** ist die  $k$ -te Wurzel,  $f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$ .

**5.4.5 Definition (Allgemeine Potenzen).** Sei  $a > 0, x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a)$$

**Rechenregeln dazu:** Für  $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$ :

(1)  $\ln(a^x) = x \cdot \ln a$

(2)  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$$(3) a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

*Begründung.*  $(a^x)^y = \underbrace{\exp(x \cdot \ln a)}_b^y = \exp(\ln b \cdot y) = \exp(y \cdot x \cdot \ln a) = \exp((x \cdot y) \cdot \ln a) := a^{x \cdot y}$

$$(4) \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

**Wichtige Grenzwerte:**

$$(1) x^k \cdot \exp(-x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$(2) \frac{x^k}{\ln x} \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty, k > 0$$

*Begründung.*

$$\frac{x^k}{\ln x} = \frac{\exp(k \cdot \ln x)}{\ln x} = k \cdot \frac{\exp(k \cdot \ln x)}{k \cdot \ln x} \rightarrow \infty$$

denn für  $x \rightarrow \infty$  strebt  $k \cdot \ln x \rightarrow \infty$

$$(3) \text{ Für alle } a > 0 : x^a = \exp(a \cdot \ln x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty$$

## 6 Differentiation

### 6.1 Differenzierbarkeit: Definition und erste Eigenschaften

Die Ableitung einer Funktion ist ein besonders wichtiger Begriff der Analysis, welcher wiederum auf dem Begriff des Grenzwertes aufbaut. Seine Bedeutung in der Mechanik (Geschwindigkeit, Beschleunigung) hat auch die historische Entwicklung entscheidend mitgeprägt.

**6.1.1 Definition.** Sei  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  ist **differenzierbar in**  $x_0$ , genau dann wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Weiter heissen  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  **Differenzenquotienten** von  $f$  bei  $x_0$  und, falls existent,

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x) =: \frac{df}{dx}(x_0)$$

die **Ableitung** von  $f$  in  $x_0$ , bzw. **Differentialquotient**.

$f$  heisst **differenzierbar (in  $D$ )**, wenn  $f$  in allen Punkten  $x_0 \in D$  differenzierbar ist. In diesem Fall erhalten wir durch

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

eine Funktion, die **Ableitung** von  $f$ .

Schwierig ist die Existenz der Ableitung dadurch, dass der Nenner gegen 0 geht.

**6.1.2 Beispiel.** (1) Die konstante Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$  ist differenzierbar.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

(2) Die lineare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$  ist differenzierbar.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a = f'(x_0).$$

(3) Die Parabelfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  ist differenzierbar.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} = (x + x_0) \rightarrow 2x_0 = f'(x_0) \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

- (4)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  ist bei 0 nicht differenzierbar, für  $x_0 \neq 0$  schon. Sei  $x_n := (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ , damit  $x_n \rightarrow 0$

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n \quad \text{divergent,}$$

also existiert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{nicht.}$$

- (5)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist differenzierbar.

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) = \frac{1}{x - x_0} \left( \frac{x_0 - x}{xx_0} \right) = -\frac{1}{xx_0} \rightarrow -\frac{1}{x_0^2} \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

**6.1.3 Satz.** Für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0).$$

Die Exponentialfunktion ist sogar komplex differenzierbar.

*Beweis.* Folgende zwei Fälle müssen untersucht werden:

- (i) Für  $z_0 = 0$  wurde das schon gezeigt.
- (ii) Für allgemeine  $z_0$  gilt:

$$\frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0) \left( \frac{\exp(z - z_0) - 1}{(z - z_0) - 0} \right) \rightarrow \exp(z_0).$$

□

**6.1.4 Korollar.** Die Funktionen  $\exp, \cos, \sin$  sind differenzierbar in  $\mathbb{R}$ . Für die Ableitungen gilt:

$$\exp' = \exp, \quad \cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos.$$

*Beweis.* • Der Satz ist klar für  $\exp$ , da dies ein Spezialfall von Satz 6.1.3 ist.

- Ableitung von  $\cos, \sin$  :  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

$$\Rightarrow \frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{x - x_0} = i \frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{ix - ix_0} \xrightarrow{\text{Satz 6.1.3}} i e^{ix_0} = -\sin x_0 + i \cos x_0$$

Real- und Imaginärteile:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{x - x_0} \right) &= \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} \rightarrow -\sin x_0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \\ \operatorname{Im} \left( \frac{e^{ix} - e^{ix_0}}{x - x_0} \right) &= \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \rightarrow \cos x_0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

□

**Arithmetik von Ableitungen:**

**6.1.5 Satz.** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x \in D$  differenzierbar, sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $f + g, \lambda f, f \cdot g$  in  $x$  differenzierbar und es gilt

$$(i) (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

$$(ii) (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{„Produktregel“}$$

(iii) Ist  $g(x) \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g}$  in  $x$  definiert, differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{„Quotientenregel“}.$$

Die einfachen Beweise lassen wir hier weg. Als Anwendung erhält man z.B.

**6.1.6 Beispiel.** (1) Sei  $f_k(x) = x^k, k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$f'_k(x) = k \cdot x^{k-1}.$$

(für  $k < 0$  nur für  $x \neq 0$  definiert.)

(2) Definiere  $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ . Es ist auch  $\tan$  differenzierbar und

$$\tan'(x) = \dots = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x.$$

**6.2 Lineare Approximation und Tangenten**

Nun kommen wir zu einer Charakterisierung der Differenzierbarkeit, deren Bedeutung erst in höheren Dimensionen wirklich klar wird.

**6.2.1 Satz.** Sei  $D \subset \mathbb{R}, a \in \overline{D} \setminus \{a\}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Äquivalent sind

(i)  $f$  ist differenzierbar in  $a$ .

(ii)  $\exists c \in \mathbb{R} \exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$  so dass

$$f(x) = \underbrace{f(a) + c \cdot (x-a)}_{\text{affin linear}} + \varphi(x) \quad (x \in D).$$

In diesem Falle ist  $c = f'(a)$ .  $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$   
„Tangente“



Die Tangente  $t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$  approximiert  $f$  an der Stelle  $a$  in „erster Ordnung“, d.h. der Fehler  $\varphi(x)$  geht bei  $a$  schneller gegen 0 als  $x-a$  (linear).

*Beweis.* [(zu Satz 6.2.1)] „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) \\ \Rightarrow f(x) &:= f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \varphi(x)\end{aligned}$$

und

$$\frac{\varphi(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow a,$$

weil  $f$  differenzierbar ist.

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a) + c \cdot (x - a) + \varphi(x) - f(a)}{x - a} = c + \frac{\varphi(x)}{x - a} \rightarrow c,$$

also ist  $f$  differenzierbar bei  $a$  mit  $f'(a) = c$ . □

**6.2.2 Korollar.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D$ .

$f$  ist differenzierbar in  $a \xLeftrightarrow f$  stetig in  $a$ .

*Beweis.*  $f(x) \stackrel{\text{Satz 6.2.1}}{=} f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \varphi(x) \rightarrow f(a)$  für  $x \rightarrow a$ . □  
~~Män könnte sagen,  $f$  approximiert  $g$~~   
 (in 0-ter Ordnung) am Punkt  $a$ , wenn

Nun noch etwas mehr zur „linearen Approximation“:  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = 0$ .



$f$  approximiert  $g$  in erster Ordnung (linear) in  $a$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0,$$

d.h. wenn der „Fehler“  $f(x) - g(x)$  bei Annäherung an  $a$  schneller als linear fällt.

Allgemeiner:

$f$  approximiert  $g$  in  $k$ -ter Ordnung im Punkt  $a$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^k} = 0.$$

*Bemerkung.* (a)  $f$  ist stetig im Punkt  $a$

$\Leftrightarrow f$  approximiert die konstante Funktion  $f(a)$

$\Leftrightarrow \exists c$  so, dass  $f$  die konstante Funktion  $c$  approximiert.

(b)  $f$  ist differenzierbar im Punkt  $a$

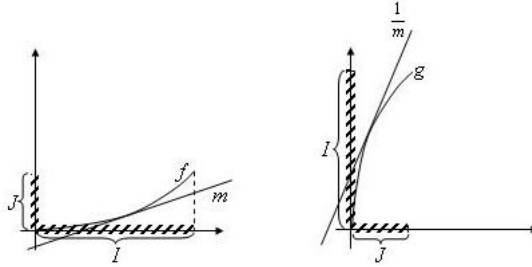
$\Leftrightarrow f$  approximiert die affine Funktion  $f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$  in erster Ordnung

$\Leftrightarrow$  es gibt eine affine Funktion, die  $f$  in erster Ordnung approximiert.

### 6.3 Ableitung der Umkehrfunktion und Kettenregel

**6.3.1 Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton,  $J := f(I)$  und  $g := f^{-1} : J \rightarrow I$ . Ist  $x \in I$ ,  $f$  differenzierbar in  $x$  und  $f'(x) \neq 0$ , so ist  $g$  in  $f(x) =: y$  differenzierbar und  $g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$ .

Für die Umkehrfunktion werden  $x$  und  $y$  vertauscht. Also ist der Graph von  $f^{-1} = g$  das Bild des Graphen von  $f$  unter der Spiegelung an der Winkelhalbierenden.



Was ist für  $f'(x) = 0$ ?

*Beweis.* (von Satz 6.3.1) Sei  $(y_n) \subset J \setminus \{y\}$ ,  $y_n \rightarrow y$ ,

$$\frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)},$$

wenn wir  $x_n := g(y_n)$  definieren. Nun konvergiert

$$\frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \left( \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right)^{-1} \rightarrow (f'(x))^{-1}.$$

□

**6.3.2 Beispiel.**  $\ln' = \frac{1}{x}$ ; setze  $f = \exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $g = \ln = \exp^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $y > 0$  folgt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

**6.3.3 Satz (Kettenregel).** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$ . Sei  $f$  in  $x$  differenzierbar und  $g$  in  $f(x)$  differenzierbar. Dann ist  $g \circ f$  in  $x$  differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

*Beweis.* Setze  $y := f(x)$ ,  $g^* : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g^*(\eta) := \begin{cases} \frac{g(\eta) - g(y)}{\eta - y} & : \text{für } \eta \neq y \\ g'(y) & : \text{für } \eta = y \end{cases}$$

## 6.4. HÖHERE ABLEITUNGEN UND PARTIELLE ABLEITUNGEN 59

Da  $g$  in  $y$  differenzierbar ist, gilt  $\lim_{\eta \rightarrow y} g^*(\eta) = g^*(y) = g'(y)$ .

Für alle  $\eta$  ist  $g(\eta) - g(y) = (\eta - y)g^*(\eta)$ . (★)

Mit diesen Vorüberlegungen gilt

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(\xi) - g \circ f(x)}{\xi - x} &= \frac{g(f(\xi)) - g(y)}{\xi - x} \stackrel{(\star)}{=} \frac{g^*(f(\xi))(f(\xi) - y)}{\xi - x} \\ &= g^*(f(\xi)) \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \xrightarrow{\xi \rightarrow x} g'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

□

## 6.4 Höhere Ableitungen und partielle Ableitungen

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so definiert  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche man wieder auf Differenzierbarkeit untersuchen kann.

**6.4.1 Definition.** Ist  $f'$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, so nennt man

$$(f')'(x_0) =: f''(x_0) =: \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

die **zweite Ableitung** von  $f$  in  $x_0$ .

Induktiv wird die  **$k$ -te Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x_0$  definiert und mit

$$f^{(k)}(x_0) = \left( f^{(k-1)} \right)'(x_0)$$

Es heisst  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $k$ -mal differenzierbar bei  $x_0$ , wenn die  $k$ -te Ableitung existiert (d.h.  $f$  ist differenzierbar,  $f'$  ist differenzierbar, ...,  $f^{(k-1)}$  ist differenzierbar in  $x_0$ ).

**6.4.2 Definition.**  $f$  heisst  **$k$ -mal stetig differenzierbar** in  $D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $f$  überall in  $D$   $k$ -mal differenzierbar und die  $k$ -te Ableitung  $f^{(k)}$  zusätzlich stetig ist.

**Bezeichnung:**

$$\begin{aligned} C^k(D) &= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}, \\ C^0(D) &= C(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\} \end{aligned}$$

Natürlich ist  $C^0(D) \supset C^1(D) \supset C^2(D) \supset \dots$

Wir wollen schon einen voreiligen Blick auf den  $d$ -dimensionalen Fall wagen:

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bzw. } f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}$$

Ist  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $e_k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \dots)$  der  $k$ -te Einheitsvektor, so wird durch

$$g_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto f(x_0 + te_k)$$

für  $\varepsilon > 0$  klein genug eine Funktion  $g_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, die **partielle Funktion** in Richtung  $e_k$ . Ist diese Funktion für  $t = 0$  differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) := g'_k(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + h \cdot e_k - f(x_0)}{h}$$

die  **$k$ -te partielle Ableitung** von  $f$ , bzw. **partielle Ableitung in Richtung  $e_k$** .

**6.4.3 Beispiel.**  $H : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) := \frac{1}{2} \|p\|^2 - \|q\|^2$ . Hier würde man die partiellen Ableitungen entsprechend mit  $\frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i$ ,  $\frac{\partial H}{\partial q_k} = 2q_k$ . (Wichtiger physikalischer Hintergrund: die Hamiltonfunktion für den harmonischen Oszillator.)

## 6.5 Lokale Extrema, Mittelwertsatz und Satz von Rolle

Alles beginnt mit einer

**6.5.1 Definition.** Sei  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in D$ .

$f$  hat an der Stelle  $x$  ein **lokales Maximum**  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall \xi \in (x-\delta, x+\delta) : f(\xi) \leq f(x)$ .

$f$  hat an der Stelle  $x$  ein **globales Maximum**  $\Leftrightarrow \forall \xi \in D : f(\xi) \leq f(x)$ .

$f$  hat an der Stelle  $x$  ein **lokales/globales Minimum**  $\Leftrightarrow -f$  hat an der Stelle  $x$  ein lokales/globales Maximum.

Ein **Extremum** ist ein Maximum oder Minimum.

$f$  hat bei  $x$  ein **striktes Extremum**  $\Leftrightarrow \forall \xi \in D : f(\xi) \neq f(x)$ .

**6.5.2 Satz.** In  $x_0 \in (a, b)$  besitze  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Extremum. Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so ist

$$f'(x_0) = 0.$$

**Beachte:**  $f'(x_0) = 0$  ist notwendig aber nicht hinreichend. Z.B. hat  $f(x) = x^3$ ,  $f'(0) = 0$  aber kein Extremum bei  $x_0 = 0$ !

*Beweis.* (von Satz 6.5.2): Wir betrachten o.E.d.A. den Fall, dass  $f$  ein Minimum besitze. Sei  $x_n \searrow x_0$ , dann ist

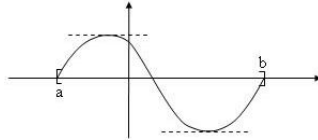
$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ist andererseits  $y_n \nearrow x_0$ , so gilt

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Insgesamt:  $f'(x_0) = 0$ . □

**6.5.3 Satz (Rolle, 1652-1719).** Sei  $a, b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) = f(b) = 0$  in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

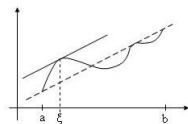


*Beweis.* Nach Satz (welcher?) aus Analysis I besitzt  $f$  in  $[a, b]$  ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ist eine dieser Stellen  $x_0$  in  $(a, b)$ , so ist  $f'(x_0) = 0$  nach dem vorherigen Satz. Haben wir als Minimum- und Maximumstelle jeweils  $a, b$  gefunden, so ist  $F \equiv 0$ .  $\square$

Als Korollar können wir von der Voraussetzung  $f(a) = f(b) = 0$  absehen:

**6.5.4 Korollar (Mittelwertsatz).** Sei  $a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gibt es  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



*Beweis.* Setze

$$F(x) := f(x) - \underbrace{\left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)}_{\text{Gleichung der Sekante}}$$

$\implies F(a) = F(b) = 0 \xrightarrow{\text{S.v.Rolle}} \exists \xi : F'(\xi) = 0$ , also

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$

**6.5.5 Korollar.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, differenzierbar in  $(a, b)$ .

- (a) Ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  konstant.
- (b) Ist  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  monoton steigend.
- (c) Ist  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  streng monoton steigend.

Analoges gilt für  $f' < 0$  bzw.  $f' \leq 0$ .

*Beweis.* (a) Sei  $a \leq x < y \leq b$ . Nach dem Mittelwertsatz gibt es  $\xi \in (x, y)$  mit  $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) = 0$ .

$$(b) f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) \geq 0$$

$$(c) f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) > 0$$

□

**6.5.6 Korollar.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und ist  $x \in (a, b)$  mit  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ ), so besitzt  $f$  in  $x$  ein striktes lokales Maximum (Minimum).

*Beweis.*

$$0 > f''(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f'(y) - f'(x)}{y-x} \stackrel{f'(x)=0}{=} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f'(y)}{y-x}$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : 0 > \frac{f'(y)}{y-x} \quad (0 < |y-x| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow f'(y) > 0 \text{ für alle } y \in (x-\varepsilon, x) \wedge f'(y) < 0 \text{ für alle } y \in (x, x+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f \text{ ist in } (x-\varepsilon, x) \text{ streng monoton steigend} \wedge f \text{ hat in } x \text{ ein striktes lokales Maximum.}$$

□

**6.5.7 Korollar (Verallgemeinerter Mittelwertsatz).** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

*Beweis.* Betrachte  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = (f(b) - f(x))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

$$\Rightarrow F(a) = F(b) = 0. \text{ Satz von Rolle: } \exists \xi \in (a, b) :$$

$$\begin{aligned} 0 &= F'(\xi) \\ &= (f(b) - f(a))g'(\xi) - f'(\xi)(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

□

**6.5.8 Korollar (Regel von de l'Hospital, 1661-1704).** Seien  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, in  $(a, b)$  differenzierbar,  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b)$ ,  $f(a) = g(a) = 0$ . Existiert  $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , so existiert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Beweis.* Sei  $x_n \searrow a$ . Zeige  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Mit verallgemeinertem Mittelwertsatz wähle  $\xi \in (a, x_n)$  mit

$$(f(x_n) - \underbrace{f(a)}_{=0})g'(\xi_n) = (g(x_n) - \underbrace{g(a)}_{=0})f'(\xi_n)$$

Da mit  $x_n \searrow a$  auch  $\xi_n \searrow a$  folgt

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

*Bemerkung.* Entsprechende Aussagen gelten auch für  $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Die Fälle  $a = -\infty, b = +\infty$  sind zugelassen.

**6.5.9 Beispiel.** (a)  $\lim_{x \searrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = ?$

$$\left( ? = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \right)$$

(b)  $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

$$\left( \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 = ? \right)$$

(c)  $\lim_{x \searrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \searrow 0} \left( \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} \right) = \dots = 0$

## 7 Integration

Wir betrachten nun das Riemann-Integral. Für den Mathematiker geht es zunächst um eine geeignete Definition. Der Hauptsatz der Integralrechnung (HDI) wird dann als wichtigstes Hilfsmittel zum Berechnen von Integralen werden.

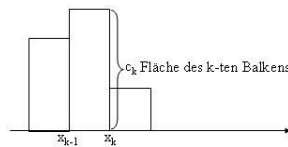
### 7.1 Das Riemann-Integral

**7.1.1 Definition.** Sei  $a < b$ . Eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **Treppenfunktion**, wenn es eine Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  gibt mit  $\varphi$  ist konstant in  $(x_k, x_{k+1})$  für alle  $k = 0, \dots, n-1$ . Die Menge der Treppenfunktionen wird mit  $T[a, b]$  bezeichnet.

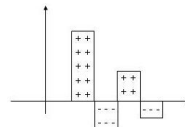
**Behauptung:**  $T[a, b]$  ist ein Vektorraum.

**7.1.2 Definition.** Sei  $\varphi \in T[a, b]$  mit der Unterteilung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  und  $\varphi(x) = c_k$  für  $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Dann ist

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$



*Bemerkung.*  $\int_a^b \varphi(x) dx \in \mathbb{R}$  entsteht als „gewichteter“ Flächeninhalt zwischen Graph und  $x$ -Achse, Flächen unter der  $x$ -Achse werden negativ gezählt.



**7.1.3 Lemma.** Seien  $\varphi, \psi \in T[a, b]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(i) \quad \int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx,$$

$$(ii) \quad \int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b \varphi(x)dx,$$

$$(iii) \quad \varphi \geq 0 \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0,$$

$$(iv) \quad \left| \int_a^b (\varphi)(x)dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|dx.$$

Die ersten beiden Eigenschaften kann man dadurch zusammenfassen, dass man sagt

$$I : T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)dx$$

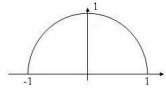
ist linear.

Die Eigenschaften (iii), (iv) heissen manchmal auch **Monotonie** bzw. **Positivität** des Integrals.

Aus (iii) folgt natürlich (betrachte  $\psi - \varphi$ )

$$\varphi \leq \psi \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$$

Wir wollen nun versuchen  $I : T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf einen größeren Vektorraum fortzusetzen. Bis jetzt können wir ja nur Treppenfunktionen integrieren und so interessante Beispiele wie das folgende funktionieren so nicht.



$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} \text{ Kreisfläche}$$

Bei der Fortsetzung sollten Linearität und Monotonie bestehen bleiben.

**7.1.4 Definition.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann existieren

$$\underline{\int} f := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} \quad \text{Unterintegral und}$$

$$\overline{\int} f := \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)dx : \psi \in T[a, b], f \leq \psi \right\} \quad \text{Oberintegral von } f.$$

Hat man eine „vernünftige“ Fortsetzung  $I(f)$  für  $f$  gefunden, so ist wegen der Monotonie

$$\underline{\int} f \leq I(f) \leq \overline{\int} f.$$

Die Riemann-integrierbaren Funktionen sind die, für die diese Ungleichung den Wert von  $I(f)$  schon festlegt.

**7.1.5 Definition.** Wir nennen  $f$  **Riemann-integrierbar**, wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt ist und  $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ . Der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen ist  $R[a, b]$ .

**Ziel:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\implies f$  Riemann-integrierbar.

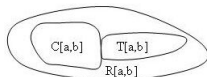
**7.1.6 Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  kompakt,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x, y \in I : |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

*Beweis.* Angenommen die Aussage des Satzes gilt nicht, dann existiert  $\varepsilon > 0$  und  $x_n, y_n \in I$  mit  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ . Wähle konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  ( $I$  kompakt)

$$x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}, \text{ da } |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq k^{-1}$$

$\varepsilon < |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow 0$ , da  $f$  stetig  $\implies$  *Widerspruch*. □



Dies folgt aus

**7.1.7 Satz.**  $C([a, b]) \subset R([a, b])$ .

*Beweis.* Jedes  $f \in C([a, b])$  ist nach S.v. Maximum beschränkt. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta > 0$  mit  $|y - x| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Möglich nach Satz 7.1.6.

Wähle Zerlegung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  mit  $|x_k - x_{k+1}| \leq \delta$ . Dann folgt

$$\left| \underbrace{\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)}_{=: d_k} - \underbrace{\min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)}_{=: c_k} \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= d_k \text{ für } x \in [x_{k-1}, x_k], f(b) \text{ für } x \in b \\ \varphi(x) &:= c_k \text{ für } x \in [x_{k-1}, x_k], f(b) \text{ für } x \in b \end{aligned}$$

folgt  $\psi, \varphi \in T[a, b]$ ,  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| &\leq \sum_k (d_k - c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_k \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\overline{\int} f - \underline{\int} f \leq \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig, ist  $f \in R[a, b]$ . □

*Bemerkung.*

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b] \text{ mit} \\ \varphi \leq f \leq \psi \text{ und } \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

### Riemannsches Integritätskriterium:

*Bemerkung.*  $f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b], \varphi \leq f \leq \psi$  mit  $\int \psi - \int \varphi \leq \varepsilon$

**7.1.8 Satz.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton. Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar.

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $f$  monoton steigend  $\Rightarrow f$  beschränkt. Fixiere ein  $n \in \mathbb{N}$ : Wähle Zerlegung  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  mit  $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(x_{i-1}) \text{ falls } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \varphi(b) := f(b) \\ \psi(x) &:= f(x_i) \text{ falls } x \in (x_{i-1}, x_i), \quad \psi(b) := f(b) \\ &\Rightarrow \varphi \leq f \leq \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi - \varphi)(x) dx &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

$n$  ist beliebig (für große  $n$  wird die rechte Seite beliebig klein).

$$\Rightarrow \int_a^b f = \overline{\int} f \Rightarrow f \in R[a, b].$$

□

**7.1.9 Satz.** Sei  $f \in R[a, b]$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für jede Unterteilung  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  mit „Feinheit“  $\max_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) < \delta$  und beliebige  $f_i \in [\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)]$  gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f_i (x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

*Bemerkung.* Ist  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $f_i := f(\xi_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  heißt Riemann-Summe.

Wir haben  $I : T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (linear und monoton) auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt. Jetzt kommen wir zu Linearität und Monotonie

$$I : \mathbb{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \int_a^b f(x) dx.$$

**7.1.10 Satz (Hilfssatz).** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt

$$(a) \text{ Für } \lambda \geq 0 \text{ ist } \overline{\int} \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \overline{\int} f(x) dx$$

$$(b) \overline{\int} (f + g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$$

$$(c) \overline{\int} f = - \underline{\int} (-f).$$

*Beweis.* (a) ist klar für  $\lambda = 0$ . Sei also  $\lambda > 0$  : Ist  $\varphi \geq f \in T[a, b]$ . Dann ist  $\lambda \cdot \varphi \geq \lambda \cdot f$ .

$$\overline{\int} \lambda f(x) dx \leq \overline{\int} \lambda \varphi(x) dx = \lambda \overline{\int} \varphi(x) dx.$$

Infimum über  $\varphi \in T[a, b]$ ,  $\varphi \geq f$  :

$$\begin{aligned} \overline{\int} \lambda f(x) dx &\leq \lambda \cdot \overline{\int} f(x) dx = \lambda \overline{\int} \left( \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \right) f(x) dx \\ &\leq \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \overline{\int} \lambda f(x) dx = \overline{\int} \lambda f(x) dx. \end{aligned}$$

(b) Sei  $\varphi, \psi \in T[a, b]$ ,  $\varphi \geq f$ ,  $\psi \geq g \Rightarrow f + g \leq \varphi + \psi$ .

$$\overline{\int} (f - g)(x) dx \leq \overline{\int} (\varphi + \psi)(x) dx = \overline{\int} \varphi(x) dx + \overline{\int} \psi(x) dx.$$

Infimum über  $\varphi \in T[a, b]$ ,  $\varphi \geq f$  :

$$\overline{\int} (f + g)(x) dx = \overline{\int} f(x) dx + \overline{\int} \psi(x) dx.$$

Infimum über  $\psi \geq g$ ,  $\psi \in T[a, b]$  :

$$\overline{\int} (f + g)(x) dx \leq \overline{\int} f(x) dx + \overline{\int} g(x) dx.$$

(c)  $\psi \leq f \Leftrightarrow -f = -\psi$ . □

**7.1.11 Satz.** Seien  $f, g \in R[a, b]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $f + g$ ,  $\lambda f \in R[a, b]$ , und:

$$(a) \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$(b) \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

$$(c) \text{ Ist } f \leq g, \text{ so gilt } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

*Beweis.* (a) Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\int} f + \underline{\int} g &= - \left( \overline{\int} (-f) + \overline{\int} (-g) \right) \\ &\leq - \left( \overline{\int} -(f + g) \right) = \underline{\int} (f + g) \\ &\leq \underline{\int} f + \underline{\int} g. \end{aligned}$$

Da  $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ ,  $\underline{\int} g = \overline{\int} g$ : alle „ $\leq$ “ sind „ $=$ “.

(b) folgt sofort aus dem Hilfssatz 7.1.10.

(c)  $\varphi \geq g \Rightarrow \varphi \geq f$  und  $\overline{\int} g \geq \overline{\int} f$ . □

**7.1.12 Korollar.** Sei  $f \in R[a, b]$ . Dann gilt

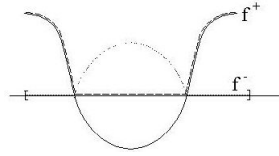
$$f^+, f^-, |f| \in R[a, b].$$

Dabei ist

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := (-f^+)^+, \quad f^+ - f^- = f, \quad |f| = f^+ + f^-$$

Es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \cdot \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$



*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ .  $f \in R[a, b]$ . Es existieren  $\varphi, \psi \in T[a, b]$ ,  $\varphi \leq f \leq \psi$  mit  $\int(\psi - \varphi)(x)dx \leq \varepsilon$ . Mit  $\varphi, \psi \in T[a, b]$  ist auch  $\varphi^+, \psi^+ \in T[a, b]$  und  $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$ .

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi \Rightarrow \int(\psi^+ - \varphi^+)(x)dx \leq \int(\psi - \varphi)(x)dx \leq \varepsilon \\
 &\Rightarrow f^+ \in R[a, b] \\
 &\Rightarrow f^- = f^+ - f \in R[a, b], |f| = f^+ + f^- \in R[a, b] \\
 ! &\int_a^b f(x)dx \stackrel{f \leq |f|}{\leq} \int_a^b |f(x)|dx \\
 &\quad - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f)(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx. \\
 ! &|f(x)| \leq \rho := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \\
 &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \rho dx = (b - a)\rho.
 \end{aligned}$$

□

**7.1.13 Satz.** Sei  $a < b < c$ ,  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f|_{[a, b]} \in R[a, b] \text{ und } f|_{[b, c]} \in R[a, b].$$

Es gilt dann

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

*Bemerkung.* Für  $f : M \rightarrow M'$ ,  $d \subset M$  ist  $f|_D : D \rightarrow M'$ ,  $(f|_D)(x) := f(x)$  die Einschränkung von  $f$  auf  $D$ .

*Beweis.* Einfach. Man setzt  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . Für  $b < a$  gilt  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ . □

## 7.2 Integration und Differentiation, der „Hauptsatz“

Hier werden wir sehen, dass Integration die „Umkehrung“ der Differentiation ist. Damit werden normalerweise Integrale berechnet. Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall.

## 7.2. INTEGRATION UND DIFFERENTIATION, DER „HAUPTSATZ“

**7.2.1 Satz.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $a \in I$ . Definiere  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ . Dann ist  $F$  differenzierbar und  $F' = f$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) &\rightarrow f(x) \text{ für } h \rightarrow 0 : \\ \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) &= \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) - f(x) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt. \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Mittel über } f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \sup\{|f(t) - f(x)| : |t - x| \leq |h|\} \rightarrow 0 \\ &\text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

**7.2.2 Definition.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$  heißt **Stammfunktion** für  $f$ .

Schreibweise:  $F = \int f(x)dx$ .

Ist  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Stammfunktion, so folgt  $F' = G'$ , also  $G = F + \text{const}$ .

**7.2.3 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion und für jede Stammfunktion  $G$  gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) =: G(x)|_a^b.$$

*Beweis.* Mit  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$  folgt mit 7.2.1 die Existenz einer Stammfunktion.

Klar ist:  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ .  $\Rightarrow$  Behauptung für beliebige Stammfunktionen

$$G : \quad G(b) - G(a) = F(b) - F(a). \quad \square$$

**7.2.4 Satz (Substitutionsregel).** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $\varphi([a, b]) \subset I$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

„Eselbrücke“:  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t) dt$ .

*Beweis.* Sei  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  Stammfunktion zu  $f$ . Für  $F \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ . Aus dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

□

**7.2.5 Beispiel.** (a) Für  $\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx$  ist  $\varphi(t) := t+c$ ,  $\varphi'(t) = 1$ .

(b) Für Zahlen  $-1 \leq a < b \leq 1$  sei  $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$ .  $\varphi(t) = \sin t$ ,  $\varphi'(t) = \cos t$ .

$$\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} \sqrt{1-x^2} dx = \int_u^v \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_u^v \cos^2 t dt.$$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^2 t dt.$$

**7.2.6 Satz (Partielle Integration).** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit der Stammfunktion  $G$ . Dann gilt

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx.$$

*Merkregel:*  $\int uv' = uv - \int u'v$ .

*Beweis.* Nach der Produktregel und dem Hauptsatz der Integralrechnung ist dieser Satz klar. Die Ableitung der rechten Seite liefert  $fg + f'G - f'G = fg$ . □

**7.2.7 Beispiel.** (1) Es gilt

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_g \cdot \underbrace{\ln x}_f dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

(2) Weiterhin:

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= \int 1 \cdot \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Hierbei ist  $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ .

(3) Es gilt

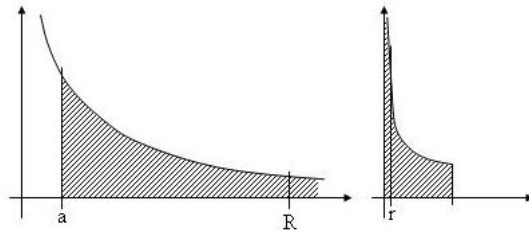
$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 t \, dt = \cos t \cdot \sin t + \int 1 - \cos^2 t \, dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + t - \int \cos^2 t \, dt \\ \Rightarrow \int \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) \Big|_{\arcsin a}^{\arcsin b}$$

$$\text{Für } a = -1, b = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

## 7.3 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir beschränkte Intervalle und beschränkte Funktionen betrachtet.



**7.3.1 Definition.** Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b > a$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[a, b]$ ,  $r < b$  Riemann-integrierbar. Falls

$$\lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

existiert, so heißt  $f$  auf  $[a, b)$  **uneigentlich R-integrierbar** ( $\int_a^b f(x) \, dx$  ist **konvergent**).

Analog für  $-\infty \leq a < b < \infty$ ,  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und für  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ .

**7.3.2 Beispiel.** (1) Es ist  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$  konvergent für  $s > 1$  und nicht konvergent für  $s \leq 1$ .

**Beweis:**  $s \neq 1$  :

$$\int_1^r \frac{dx}{x^s} = \int dx x^{-s} = \frac{x^{-s+1}}{1-s} \Big|_1^r = \frac{r^{-s+1}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \infty & \text{für } s < 1 \end{cases}$$

Für  $s = 1$ : (Stammfunktion  $\ln$ )

(2) Es konvergiert  $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$  für  $s < 1$ , nicht für  $s \geq 1$ .

Rechnung wie oben:  $\frac{r^{-s+1}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \dots$

(3)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^s}$  konvergiert nicht.

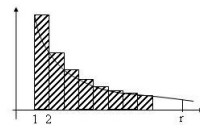
(4) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (-\arctan(-r)) + \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan r = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

**7.3.3 Satz (Integral-Vergleichskriterium für Reihen).** Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent.}$$

*Beweis.*  $\sum_{k=2}^N f(k) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{k=1}^N f(k)$



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} &\iff \left( \sum_{k=1}^N f(k) \right)_N \text{ beschränkt} \iff \left( \int_1^N f(x) dx \right) \text{ beschränkt} \\ &\iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent.} \end{aligned}$$

□

**7.3.4 Beispiel.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} =: \rho(s)$  konvergiert für  $s > 1$ .

Riemannsche Vermutung:  $\rho(s)$  kann man fortsetzen zu einer Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \dots$   
 Vermutung: Alle Nullstellen dieser Funktion liegen auf  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ .

**7.3.5 Beispiel.** (1)  $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ :  $\int_a^b x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \Big|_a^b$

Hierbei:

$s \in \mathbb{N}_0$ :  $a, b \in \mathbb{R}$

$s \in \mathbb{Z}, s \leq -2$ :  $a, b > 0$  oder  $a, b < 0$

$s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ :  $a, b > 0$ .

(2) Es ist

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x \Big|_a^b & \text{für } a, b > 0 \\ \ln(-x) \Big|_a^b & \text{für } a, b < 0 \end{cases}$$

Einfache Schreibweise:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

(3)  $\int \sin x dx = -\cos x$ ,  $\int \cos x dx = \sin x$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x dx &= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = +1 + 1 = 0 \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x \quad \text{Vorsicht mit Definitionsbereich!} \end{aligned}$$

(4)  $\int \exp x dx = \exp x$

(5) Partialbruchzerlegung:  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  auf  $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ .

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

Die Zerlegung klappt für  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ :  $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x} \right) = \frac{1}{2} (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

**7.3.6 Satz.** Für  $x > 0$  ist das uneigentliche Integral

$$\sqrt{(x)} := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

konvergent.  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  heißt **Gamma-Funktion**. Es gilt:  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$  für  $x > 0$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

*Beweis.* Für  $0 < t \leq 1$ :  $0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$

$$\Rightarrow \int_r^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_r^1 t^{x-1} dt < \infty$$

Für  $1 \leq t$ :  $0 < t^{x-1} e^{-t} = \underbrace{t^{x-1} e^{-\frac{t}{2}}}_{\rightarrow 0} e^{-\frac{t}{2}} \leq c_x \cdot e^{-\frac{t}{2}}$

$$\Rightarrow \int_1^R t^{x-1} e^{-t} dt \leq c_x \cdot \int_1^R e^{-\frac{t}{2}} dt = (-2) e^{-\frac{t}{2}} \Big|_1^R = 2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-\frac{R}{2}} < \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{konvergent}$$

$$\int_r^R \underbrace{t^x}_u \underbrace{e^{-t}}_v dt = -t^x \cdot e^{-t} \Big|_r^R + x \int_r^R t^{x-1} e^{-t} dt \Rightarrow \Gamma(x+1) = 1.$$

Induktionsschritt:  $\Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$  □