

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Skript zur Vorlesung

ANALYSIS II

Prof. Stollmann

SS 2004

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Inhaltsverzeichnis

8	Konvergenz von Funktionenfolgen	3
8.1	Gleichmäßige Konvergenz und Vertauschungssätze	3
8.2	Potenzreihen	7
8.3	Taylor'sche Formel	10
9	Funktionen mehrerer Veränderlicher	13
9.1	Stetige Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n	13
9.2	Differentiation von Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n	17
9.3	Differentiationsregeln und Mittelwertsätze	23
9.4	Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor	26
9.5	Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen	30

8 Konvergenz von Funktionenfolgen

Mit metrischen Räumen haben wir den Begriffsapparat, um Konvergenz nicht nur für Folgen von Zahlen sondern auch für Folgen von Funktionen zu definieren. Das wird dazu führen, dass wir interessante Funktionen mit Hilfe von Grenzübergängen definieren können.

8.1 Gleichmäßige Konvergenz und Vertauschungssätze

Fauler Trick: $1 = x^0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^0 = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x^y = 0$??

Wir sehen, dass die Vertauschung von Grenzwerten Probleme bereiten kann. Solche Vertauschungen können auch „versteckt“ in Ableitungen, Integralen etc. auftauchen. Ein Schlüssel ist der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz.

Sei nun M eine Menge, (Y, d_Y) ein metrischer Raum.

8.1.1 Definition. Seien $f_n : M \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, $f : M \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ punktweise} &: \Leftrightarrow \forall x \in M : f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ in } (Y, d_Y) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\ f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} &: \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in M : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \\ &\text{(hier hängt } n_0 \text{ nicht von } x \text{ ab!!)} \end{aligned}$$

8.1.2 Beispiel. (1) $M = (0, 1)$, $f_n(x) := x^n$. Dann: $f_n \rightarrow 0$ punktweise aber nicht gleichmäßig.

(Nicht gleichmäßig, sonst gäbe es $n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \in d(x^n, 0) \leq \frac{1}{2}$ im Widerspruch zu $\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1$.)

(2) $M = (0, \frac{1}{2})$, $f_n(x) = x^n$. Dann ist $f_n \rightarrow 0$ gleichmäßig.

Bemerkung. Es gilt

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} &\Leftrightarrow \sup_{x \in M} d_Y(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \\ \text{Für } Y = \mathbb{R}, \mathbb{C} &\Leftrightarrow \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nun der erste Vertauschungssatz für reelle Funktionen.

8.1.3 Satz. Sei $a < b$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichm\u00e4\u00dfig} \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis.

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx$$

Nach Voraussetzung gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ ($x \in [a, b]$, $n \geq n_0$)

Damit f\u00fcr $n \geq n_0$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \varepsilon(b-a)$$

□

Mit anderen Worten: „Unter geeigneten Voraussetzungen“ gilt

$$\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

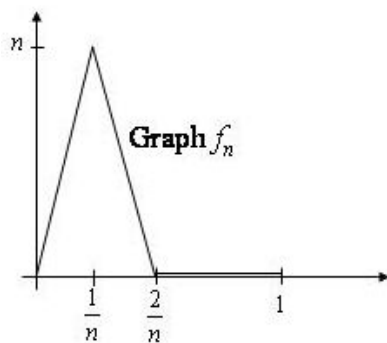
Dass man nicht ohne Voraussetzungen \int und \lim vertauschen darf, zeigt das n\u00e4chste Beispiel:

8.1.4 Beispiel. Sei $a = 0, b = 1$:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Also:

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$



Nun ein leicht zu beweisender, aber fundamentaler Satz.

8.1.5 Satz. Seien $(M, d), (Y, d_Y)$ metrische Räume; seien $f_n : M \rightarrow Y$ stetig für $n \in \mathbb{N}$, $f : M \rightarrow Y$. Dann:

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} \implies f \text{ stetig.}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, $x \in M$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\forall n \geq n_0$

$$\sup_{y \in M} d_Y(f_n(y), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geq n_0) \quad (\star)$$

Nach Voraussetzung ist f_{n_0} stetig; also existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall y \in M, d(x, y) \leq \delta : \quad d_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (\star\star)$$

Für $d(x, y) \leq \delta$ folgt:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + d_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d_Y(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\stackrel{(\star), (\star\star)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Zurück nach \mathbb{R} :

8.1.6 Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n \rightarrow f$ punktweise und $f'_n \rightarrow g$ gleichmäßig $\implies f$ ist stetig differenzierbar und $f' = g$.

„Unter geeigneten Voraussetzungen“ ist hier:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

Beweis. Es gilt für $x_0 \in I$, $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(x_0) &= \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \\ \downarrow \text{pktw. konv.} \quad \downarrow \quad \downarrow \text{Satz 8.1.3} \\ f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x g(t) dt \end{aligned}$$

\xrightarrow{HDI} f ist Stammfunktion von g ; g ist als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig. □

8.1.7 Definition. Sei $M \neq \emptyset$.

$\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{C} : f(M) \text{ beschränkt}\}$ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f(M) \text{ beschränkt}\}$ Definiere, für $f \in \mathcal{B}(M)$,

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_M = \|f\|_{\infty, M} := \sup_{x \in M} |f(x)| < \infty.$$

Bemerkung. $\mathcal{B}(M)$ ist ein (∞ -dimensionaler) Vektorraum und $\|\cdot\|_M$ ist **eine Norm** auf $\mathcal{B}(M)$, d.h.

- (1) $\|0\|_M = 0$ und $\|f\|_M > 0$ für $f \in \mathcal{B}(M) \setminus \{0\}$.
- (2) $\|f + g\|_M \leq \|f\|_M + \|g\|_M$, ($f, g \in \mathcal{B}(M)$)
- (3) $\|\lambda f\|_M = |\lambda| \cdot \|f\|_M$, ($f \in \mathcal{B}(M), \lambda \in \mathbb{C}$)

Beweis. Übung. □

8.1.8 Satz (Konvergenzkriterium von Weierstraß). Sei $M \neq \emptyset$, $f_n \in \mathcal{B}(M)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_M < \infty$. Dann ist $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ für alle $x \in M$ absolut konvergent und für $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gilt

$$\sum_{k=0}^n f_k \rightarrow F \text{ gleichmäßig für } n \rightarrow \infty.$$

Bemerkung. Durch $d_{\infty}(f, g) := \|f - g\|_M$ wird eine Metrik auf $\mathcal{B}(M)$ definiert.

8.1.9 Beispiel. $M = (-a, a)$, $a > 0$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow \|f_n\|_M = \sup_{|x| < a} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{a^n}{n!}$$

Satz 8.1.8 liefert: $\forall x \in (-a, a)$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ und die Polynome $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow \exp(x)$ gleichmäßig für $x \in (-a, a)$. Durch Ableiten der linken Seite und Satz 8.1.6:

$$\exp' = \exp.$$

Beweis. [von Satz 8.1.8] Haben absolute Konvergenz für $x \in M$ nach dem Majorantenkriterium: $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_M$. Für $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - F(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_M \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

8.2 Potenzreihen

Mit Hilfe von Potenzreihen werden wichtige Funktionen beschrieben. Als Beispiele haben wir schon die Exponentialfunktion kennengelernt. Praktischerweise arbeitet man in \mathbb{C} .

8.2.1 Definition. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

heißt **Potenzreihe**; dabei ist $z_0 \in \mathbb{C}$ der **Entwicklungspunkt**, (a_n) die Folge der Koeffizienten, $a_n \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ eine Variable.

Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n =: f(z),$$

und welche Eigenschaften besitzt f ?

Idee: f ist ein Polynom vom Grad ∞ .

8.2.2 Satz. Sei $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe.

(1) Sei $R := \sup\{|z - z_0| : \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n \text{ konvergent}\} \subset [0, \infty]$, der **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Dann gilt:

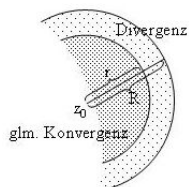
a) Für $|z - z_0| > R$ divergiert $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$.

b) Für $|z - z_0| < R$ konvergiert $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$.

(2) Seien $f_n : U_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k, \quad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

Dann ist $f_n \rightarrow f$ punktweise auf $U_R(z_0)$ und für jedes $r < R$ konvergiert $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $B_r(z_0)$.



$$U_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$$

$$B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$

Beweis. (1) Ist $R = 0$, so konvergiert $\sum a_n(z - z_0)^n$ nur für $z = z_0$; damit sind (a), (b) erfüllt und die Aussage von (b) auch klar.

Also sei ohne Einschränkung $R > 0$: Sei $r > R$. Nach Definition von R gibt es $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $r < |z_1 - z_0| \leq R$ so, dass $\sum_{n \geq 0} a_n(z_1 - z_0)^n$ konvergiert.

Wir zeigen nun die absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf $B_r(z_0)$. Setze

$$s := \sup_n |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < \infty$$

$$g_n(z) := a_n(z - z_0)^n \text{ für } z \in B_r(z_0) =: M$$

Dann ist

$$|g_n(z)| = |a_n| \cdot |z - z_0|^n$$

$$= |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n = \dots \leq s \cdot \left(\frac{r}{|z_1 - z_0|} \right)^n$$

Es ist

$$\frac{r}{|z_1 - z_0|} =: q < 1 \text{ und } \|g_n\|_M \leq s \cdot q^n$$

$$\text{geom. R.} \implies \sum_{n \geq 0} \|g_n\|_M < \infty$$

$$\text{Satz 8.1.8} \implies \text{gleichmäßige Konvergenz von } f_n(z) = \sum_{k=0}^n g_k(z) \rightarrow f(z).$$

Da $r < R$ beliebig, folgt die Konvergenz auf $U_R(z_0)$. Bleibt (b) von (1) zu zeigen. Keine Konvergenz für $|z - z_0| > R$ ist klar, sonst Widerspruch zu Supremum. \square

Bemerkung. Im Beweis von Satz 8.2.2:

$$R = \sup\{|z - z_0| : |a_n| |(z - z_0)^n|_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}$$

8.2.3 Beispiel. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot z^n$ konv. für $|z| \leq 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot z^n$ Konv.-Radius 1, div. für $z = 1$, konv. bei $z = -1$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n$ Konv.-Radius 1, div. für $|z| = 1$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot z^n$ Konv.-Radius 0

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} \cdot z^n$ Konv.-Radius ∞

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \cdot 42^{-n^2}$ Konv.-Radius 42

8.2.4 Satz. Sei $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat auch die **formal differenzierte Potenzreihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z - z_0)^{n-1}$$

den Konvergenzradius R .

Beweis. Sei R' der Konvergenzradius der formal diff. Potenzreihe $\Rightarrow R' \leq R$, denn $(n \cdot a_n(z - z_0)^{n-1})_n$ beschränkt $\Rightarrow (a_n(z - z_0)^n)_n$ beschränkt. Sei andererseits $0 < r < R$; dann existiert $r' > r$ mit

$$\begin{aligned} M &:= \sup_n |a_n| \cdot (r')^n < \infty. \\ \Rightarrow (n+1)|a_{n+1}| \cdot r^n &\leq |a_{n+1}| \cdot (r')^n \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^n \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{r'} |a_{n+1}| \cdot (r')^{n+1}}_{\leq \frac{M}{r'}} \cdot \underbrace{(n+1) \left(\frac{r}{r'}\right)^n}_{\rightarrow 0} \\ \Rightarrow R' &> r \end{aligned}$$

□

8.2.5 Korollar. Seien (a_n) , x_0 reell, $\sum_{n \geq 0} a_n(z - x_0)^n =: f(z)$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Für die Einschränkung $g := f|_{(x_0-R, x_0+R)}$ gilt:

$$\begin{aligned} g \in C^\infty(x_0-R, x_0+R), \quad g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} (x - x_0)^n \text{ und} \\ g^{(n)}(x_0) &= n! \cdot a_n. \end{aligned}$$

Beweis. Es genügt zu zeigen $g \in C^1$ und $g'(x) = \dots$. Der Rest gilt durch Induktion. Setzen wieder

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k, \quad g_n := f_n|_{(x_0-R, x_0+R)}$$

Sei $r < R$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{8.2.2} g_n \rightarrow g \text{ gleichmäßig auf } (x_0 - r, x_0 + r) \\ &\xrightarrow{8.2.2, 8.2.4} g'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot a_k(x - x_0)^k \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_k(x - x_0)^k}_{=: h(x)} \end{aligned}$$

Also: $g_n \xrightarrow{\text{glm}} g$ auf $(x_0 - r, x_0 + r)$

$g'_n \xrightarrow{\text{glm}} h$ auf $(x_0 - r, x_0 + r)$

$\xrightarrow{8.1.6} g$ differenzierbar und $g' = h$.

Beweisende, da $r < R$ beliebig. □

8.2.6 Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **analytisch**, wenn es zu jedem $z_0 \in U$ eine Koeffizientenfolge (a_n) gibt, so dass $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ den Konvergenzradius $R > 0$ besitzt und

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n \text{ für } |z - z_0| < R.$$

Ist $V \subset \mathbb{R}$ offen und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, so heißt f **reell analytisch**.

Bemerkung. Haben gezeigt: f reell analytisch $\Rightarrow f \in C^\infty$.

8.3 Taylor'sche Formel

Approximation von beliebigen differenzierbaren Funktionen durch Polynome, Mittelwertsatz, HDI

8.3.1 Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in I$.

(a) Dann gilt für $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + R_n(x_0, x)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

mit

$$R_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

(b) Es gibt eine Stelle ξ zwischen x_0 und x mit

$$R_n(x_0, x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

dh.

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$$

Beweis. (a) vollständige Induktion

$n = 1$: Behauptung:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

gilt nach HDI

(In (b) gerade der Mittelwertsatz)

$n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
 R_n(x_0, x) &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \\
 &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\
 &= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x_0, x) \\
 \Rightarrow f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x_0, x) \\
 f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x_0, x) \\
 f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x_0, x)
 \end{aligned}$$

(b) Hilfbehauptung: Sei $u \geq 0$ (bzw. $u \leq 0$), $u \in C([a, b])$, $v \in C([a, b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b u(t)v(t) dt = \left(\int_a^b u(t) dt \right) \cdot v(\xi)$$

Damit folgt Behauptung aus (b).

$$R_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \left(\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \right) f^{(n)}(\xi) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

Beweis der Hilfsaussage:

$u \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b u(t)v(t) dt &\leq \int_a^b u(t) \max v dt \\
 \min v(t) \int_a^b u(t) dt &\leq \int_a^b u(t)v(t) dt \leq \max v(t) \int_a^b u(t) dt
 \end{aligned}$$

o.E. $\int u(t) dt \neq 0$

\Rightarrow

$$\frac{\int_a^b u(t)v(t) dt}{\int_a^b u(t) dt} \in [\min v, \max v]$$

$\Rightarrow \exists \xi$ mit

$$v(\xi) = \frac{\int_a^b u(t)v(t) dt}{\int_a^b u(t) dt}$$

□

Bemerkung. Das Taylorpolynom n-ter Ordnung mit von f in x_0 ,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

ist das eindeutig bestimmte Polynom n-ter Ordnung mit: $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, \dots , $P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

9 Funktionen mehrerer Veränderlicher

9.1 Stetige Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n

Wir beginnen mit einigen Beispielen

9.1.1 Beispiel. (1) Die Bewegung eines Massenpunkts im Raum wird gegeben durch eine Abbildung

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \underbrace{t}_{\text{Zeit}} \mapsto \underbrace{x(t)}_{\text{Ort}}$$

(2) Den Temperaturverlauf im Raum kann man beschreiben durch

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto T(x) \quad (\text{Temperatur bei } x)$$

(3) Will man bei (2) eine zeitliche Veränderung berücksichtigen, so betrachtet man

$$T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \underbrace{(t, x)}_{\text{Zeit Ort}} \mapsto T(t, x)$$

(4) Ein Kraftfeld im Raum ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto F(x)$$

Zeitlich veränderlich:

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, x) \mapsto F(t, x).$$

In vielen Fällen sind Funktionen auf $A \subset \mathbb{R}^m$ gegeben. Mit der euklidischen Metrik sind Begriffe wie Stetigkeit, Konvergenz,... definiert.

Der folgende Satz ist leicht zu zeigen, verwendet man Lemma 3.1.8. aus Analysis I und Satz 3.2.4 aus Analysis I.

9.1.2 Satz. Sei $A \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, definiert durch $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Sei $x_0 \in A$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig [in } x_0] \iff \forall i = 1, \dots, n : f_i \text{ stetig [in } x_0]$$

Damit ist die Stetigkeit vektorwertiger Funktionen auf die Stetigkeit reellwertiger Funktionen zurückgeführt.

Analog kann man auf $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen mit reellem Argument „basteln“, die **partiellen Funktionen**.

Sei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (die 1 an der i -ten Stelle) der i -te Einheitsvektor, $i = 1, \dots, m$, im \mathbb{R}^m . Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, $x \in A$, so setze

$$f_{i,x} : \{t \in \mathbb{R} : te_i + x \in A\} \rightarrow \mathbb{R}^n, f_{i,x}(t) = f(t \cdot e_i + x),$$

die **i -te partielle Funktion**.

Allgemeiner, für $e \in \mathbb{R}^m$, $\|e\| = 1$:

$$f_{e,x} : \{t \in \mathbb{R} : t \cdot e + x \in A\} \rightarrow \mathbb{R}^n, f_{e,x}(t) = f(t \cdot e + x)$$

Konvention: ($t \mapsto f(x+t \cdot e)$) wird geschrieben als $f(x+\cdot e)$. Dabei steht „ \cdot “ anstelle der Variablen.

9.1.3 Definition. Sind alle $f_{i,x}, i = 1, \dots, m$ [bei x_0] stetig, so heißt f [bei x_0] **partiell stetig**.

Sind alle $f_{e,x}, \|e\| = 1$, [bei x_0] stetig, so heißt f [bei x_0] **richtungsstetig**.

9.1.4 Satz. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n, x_0 \in A \subset \mathbb{R}^m$.

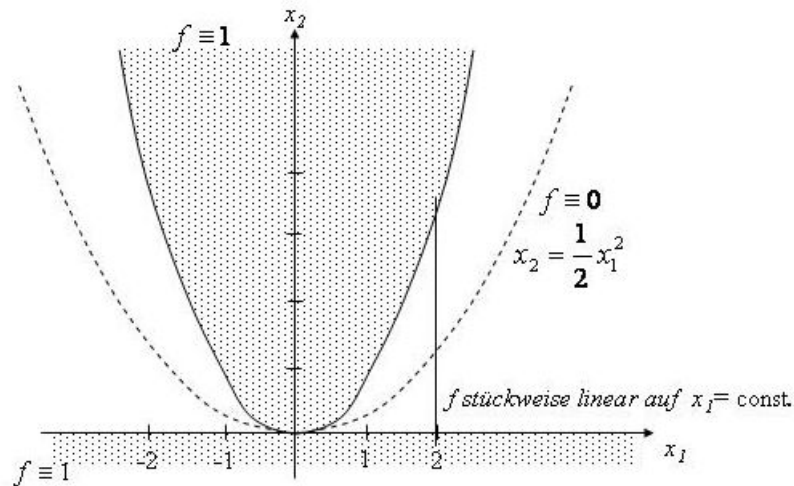
$$f \text{ stetig [in } x_0] \begin{matrix} \implies \\ \not\Leftarrow \end{matrix} f \text{ richtungsstetig [in } x_0] \begin{matrix} \implies \\ \not\Leftarrow \end{matrix} f \text{ partiell stetig [in } x_0]$$

Zum ersten $\not\Leftarrow$ folgendes Beispiel:

9.1.5 Beispiel (Richtungsstetig, aber nicht stetig). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x_2 \leq 0 \text{ oder } x_2 \geq x_1^2 \\ 1 - \frac{2x_2}{x_1^2} & , \text{ falls } 0 < x_2 < \frac{1}{2}x_1^2 \\ 1 - 2\frac{x_1^2 - x_2}{x_1^2} & , \text{ falls } \frac{1}{2}x_1^2 < x_2 < x_1^2. \end{cases}$$

Diese Funktion ist richtungsstetig in \mathbb{R}^2 , unstetig in $(0, 0)$.



f ist richtungsstetig in 0, denn für jedes $e \in \mathbb{R}^2$, $\|e\| = 1$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $f(te) \equiv 1$ für $|t| < \varepsilon$.

f ist nicht stetig bei 0, denn $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}) \rightarrow 0$ und $f(x_k) = 0 \not\rightarrow 1 = f(0)$.

9.1.6 Definition. Die Punkte $x \in \bar{A}$ werden auch **Berührungspunkte** von A genannt. Sei $A \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \bar{A}$. Dann heißt $y \in \mathbb{R}^n$ **Grenzwert von f bei x_0** , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ bzw. } y = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x).$$

Anhand der Definitionen macht man sich leicht folgende Äquivalenz klar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y &\iff \{ \forall (x_k) \in A, x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow y \\ &\iff \begin{cases} \tilde{f} : A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A \setminus \{x_0\} \\ y, & \text{falls } x = x_0 \end{cases} \\ \text{ist stetig bei } x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Merke: Selbst wenn f bei x_0 definiert ist, muss der Grenzwert von f bei x_0 nicht existieren; nämlich, wenn f bei x_0 nicht stetig ist.

9.1.7 Beispiel. (1) $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) := \frac{x}{\|x\|}$ hat bei 0 keinen Grenzwert.

(2) Für $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{|x|^2}\right)$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Wir erinnern daran, dass stetige Funktionen auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^m gleichmäßig stetig sind.

Eine wichtige Klasse stetiger Funktionen sind die **linearen Funktionen** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Es ist $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, falls $L(x + y) = L(x) + L(y)$, ($x, y \in \mathbb{R}^m$) und $L(\lambda x) = \lambda L(x)$, ($\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$)

Zu $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ gibt es bekanntlich eine Matrix

$$(L_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \quad \text{mit } L_{ij} = (Le_j | e_i).$$

Äquivalent dazu ist

$$Lx = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & \dots & L_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m L_{1j}x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m L_{nj}x_j \end{pmatrix}_{i=1, \dots, n}$$

Man sieht leicht

$$|Lx| = \underbrace{\{m\sqrt{n} \cdot \max_{i,j} |L_{ij}|\}}_{=:c} \cdot \|x\|.$$

Insbesondere ist

$$|Lx - Ly| \leq c \cdot |x - y|,$$

L ist als **Lipschitz-stetig**.

9.1.8 Lemma. Sei $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert

$$\begin{aligned} \|L\| &= \max\{|Lx| : x \in \mathbb{R}^m, |x| \leq 1\} \\ &= \inf\{c : |Lx| \leq c \cdot |x|, (x \in \mathbb{R}^m)\}, \end{aligned}$$

und $\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ definiert eine **Norm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$; Operatornorm, Matrix-Norm.**

9.1.9 Definition. Sei V ein Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$, $v \mapsto \|v\|$ heißt Norm auf V , wenn:

- (N1) $\|0\| = 0$ und $\|v\| \neq 0$ für $v \neq 0$
- (N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- (N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

9.1.10 Definition. Sei V ein VR über \mathbb{R} ; eine Abbildung $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto (u|v)$ heißt Skalarprodukt, wenn:

- $(\cdot|\cdot)$ bilinear ist, d.h.
 - $(u + v|w) = (u|w) + (v|w)$
 - $(\lambda u|w) = \lambda(u|w)$
 - $(u|v + w) = (u|v) + (u|w)$
 - $(u|\lambda w) = \lambda(u|w)$
- $(u|w) = (w|u)$
- positiv definit: $(u, u) > 0$ für $u \neq 0$,
- Ist $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V , so wird durch $\|v\| = (v|v)^{\frac{1}{2}}$ für $v \in V$ eine Norm definiert.

9.2 Differentiation von Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n

Wir wissen:

$$1 - \dim f \text{ ist differenzierbar} \iff f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varphi(x)$$

mit

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } x \rightarrow x_0 \quad (\text{linear approximierbar})$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann hei\u00dft f in x_0 **(total) differenzierbar**, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\varphi = \varphi_{x_0} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \quad (\star)$$

und

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } x \rightarrow x_0 \quad (\star\star)$$

Weil $\varphi_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - L \cdot (x - x_0)$ durch (\star) festgelegt ist, ist die \u00e4quivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt } L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \text{ mit} \\ \frac{1}{|x - x_0|} \{f(x) - f(x_0) - L \cdot (x - x_0)\} \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } x \rightarrow x_0 \end{array} \right.$$

Die Abbildung L wird **Ableitung** von f in x_0 genannt. Sie ist eindeutig, wie der folgende Satz zeigt. Wir schreiben

$$Df(x_0) := df(x_0) := f'(x_0) := L.$$

9.2.1 Satz. Sei f in x_0 differenzierbar und L entsprechend. Dann ist L eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $L_1, L_2, \varphi_1, \varphi_2$ wie in der Definition von differenzierbar gefordert, d.h.

$$f(x) = f(x_0) + L_i(x - x_0) + \varphi_i(x).$$

mit

$$\frac{\varphi_i(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } x \rightarrow x_0.$$

Dann folgt f\u00fcr $M := L_2 - L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Mx}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{M(x - x_0)}{|x - x_0|} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{L_2(x - x_0) - L_1(x - x_0)}{|x - x_0|} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{|x - x_0|} = 0 \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ folgt

$$\begin{aligned} Mx &= |x| \cdot \frac{M\left(\frac{x}{|x|}\right)}{\left|\frac{x}{|x|}\right|} \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty. \\ &\Rightarrow M \equiv 0 \\ &\Rightarrow L_1 = L_2 \end{aligned}$$

□

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, f heißt **differenzierbar**, wenn f in allen $x_0 \in U$ differenzierbar ist.

9.2.2 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Dann gilt:

$$f \text{ differenzierbar [in } x_0] \Rightarrow f \text{ stetig [in } x_0].$$

Beweis. Sei f in x_0 differenzierbar.

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = L \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

□

Für konkrete Berechnungen: „in Koordinaten rechnen“:

Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad f \text{ in } x_0 \text{ differenzierbar.} \\ Df(x_0) &= (l_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f(x) - f(x_0) = (l_{ij})(x - x_0) + \varphi(x).$$

Davon die i -te Zeile:

$$f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{j=1}^m (l_{ij})(x_j - x_{0,j}) + \varphi(x)_i.$$

Für $x = x_0 + he_j$ gilt:

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0) &= \sum_{k=1}^m l_{ik} h \cdot \delta_{kj} + \varphi(he_j)_i \\ &= l_{ij} \cdot h + \varphi(he_j)_i \\ \Rightarrow l_{ij} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0)}{h} =: \partial_j f_i(x_0) =: \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \end{aligned}$$

Dabei ist die **partielle Ableitung** $\partial_j f_i$ die Ableitung der entsprechenden partiellen Funktion.

Wir haben gezeigt:

9.2. DIFFERENTIATION VON FUNKTIONEN VON \mathbb{R}^M NACH \mathbb{R}^N 19

9.2.3 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 . Dann existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f_i(x_0), \quad j = 1, \dots, m,$$

für alle f_i , $i = 1, \dots, n$ in x_0 , und es gilt:

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \quad \text{Jacobi-Matrix, Funktionalmatrix.}$$

9.2.4 Definition. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt [in x_0] **partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen [in x_0] existieren und **stetig partiell differenzierbar**, wenn zusätzlich alle $\partial_j f_i$ auf U existieren und stetig sind.

Nach Satz 9.2.3 gilt

$$f \text{ differenzierbar [in } x_0] \Rightarrow f \text{ partiell differenzierbar [in } x_0].$$

\neq

Dazu

9.2.5 Beispiel. (1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{für } x = (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Offenbar ist f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar (damit auch total differenzierbar). Für $x_0 = 0 = (0, 0)$: $f(te_1) = f(te_2) = 0$ ($t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f$ partiell differenzierbar in 0 mit $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$. Wäre f differenzierbar in 0, so müsste $Df(0) = (0, 0)$ sein. Daraus würde folgen

$$\frac{1}{|x|} f(x) = \frac{1}{|x|} \left\{ \underbrace{f(x) - f(0)}_{=0} - \underbrace{Df(0) \cdot x}_{=0} \right\} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

im Widerspruch zu $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $x_n \rightarrow 0$

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n} \quad \text{also} \quad \frac{f(x_n)}{|x_n|} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0.$$

(2) Sei $n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $n(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. n ist partiell differenzierbar für $x \neq 0$:

$$Dn(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{für } x \neq 0.$$

n ist in 0 nicht differenzierbar!

9.2.6 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f total differenzierbar.

Beweis. Sei $x_0 \in U$, $L := (\partial_j f_i(x_0))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$. Wollen zeigen: $L = Df(x_0)$.

Dazu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in U, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{|x - x_0|} | \{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\} | \leq \varepsilon.$$

Sei $\delta > 0$. Wähle $\vartheta > 0$ so, dass für alle i, j :

$$|\partial_j f_i(x) - \partial_j f_i(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{m\sqrt{n}}, \text{ falls } |x - x_0| \leq \delta.$$

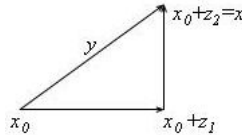
(Möglich, weil alle $\partial_j f_i$ stetig sind!)

Sei $|x - x_0| \leq \delta$ so klein, dass $B_\delta(x_0) \subset U$.

Setze $x - x_0 =: y$, $z_j := (y_1, \dots, y_j, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, m$; $z_0 := 0$.

Für $i = 1, \dots, n$ folgt

$$f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{j=1}^m f_i(x_0 + z_j) - f_i(x_0 + z_{j-1})$$



Nach dem 1-dimensionalen Mittelwertsatz existieren $\xi_{i,j} \in (0, y_j)$ mit

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + z_j) - f_i(x_0 + z_{j-1}) &= f_i(x_0 + z_{j-1} + y_j \cdot e_j) - f_i(x_0 + z_{j-1} + 0 \cdot e_j) \\ &\stackrel{\text{MWS}}{=} y_j \cdot \partial_j f_i(x_0 + z_{j-1} + \xi_{i,j} \cdot e_j) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |f_i(x_0 + z_j) - f_i(x_0 + z_{j-1}) - y_j \cdot \partial_j f_i(x_0)| &\leq |y_j| \cdot \\ &\quad |\partial_j f_i(x_0 + z_{j-1} + \xi_{i,j} \cdot e_j) - \partial_j f_i(x_0)| \\ &\leq |x - x_0| \cdot \varepsilon m \sqrt{n} \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|^2 &= \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x_0) - \sum_j \partial_j f_i(x_0) \cdot y_j|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m (f_i(x_0 + z_j) - f_i(x_0 + z_{j-1}) - \partial_j f_i(x_0) \cdot y_j) \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |x - x_0| \frac{\varepsilon}{m\sqrt{n}} \right)^2 = \varepsilon^2 |x - x_0|^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{|x - x_0|} |f(x) - f(x_0) - L \cdot (x - x_0)|^2 &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Wir betrachten zwei wichtige Spezialfälle:

$m = 1$: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ hat eine Ableitung der Form

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \dots \\ f'_n(x) \end{pmatrix},$$

natürlich nur, falls f differenzierbar in x .

$n = 1$: Eine Funktion von m Variablen. Ist f differenzierbar, so ist

$$Df(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_m f(x))$$

und

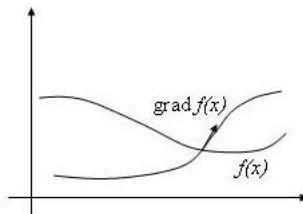
$$Df(x) \cdot y = \sum_{j=1}^m \partial_j f(x_0) y_j = (Df(x_0))^T |y|;$$

der Spaltenvektor:

$$Df(x)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \dots \\ \partial_m f(x) \end{pmatrix} =: \nabla f(x) =: \text{grad} f(x),$$

heißt **Gradient** von f an der Stelle x .

Der Gradient hat eine wichtige geometrische Bedeutung: er zeigt in die Richtung, in der f am schnellsten wächst.



9.2.7 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 .

(1) Ist $\|e\| = 1$, so ist die Richtungsableitung von f in Richtung e gegeben durch

$$\partial_e f(x_0) = (\text{grad} f(x_0) | e).$$

(2) Ist $\nabla f(x_0) \neq 0$, so zeigt $\nabla f(x_0)$ in die Richtung e , in der f am schnellsten wächst (mit dem größten $\partial_e f(x_0)$) und

$$|\text{grad} f(x_0)| = \partial_e f(x_0).$$

Beweis. Die Richtungsableitung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_e f(x_0) &= \left. \frac{d}{dt} (f(x_0 + te)) \right|_{t=0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Wir nutzen aus, dass f differenzierbar ist und schreiben

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{f(x_0) + (\text{grad } f(x_0)|he) + \varphi(x_0 + he) - f(x_0)\} \\ &= (\text{grad } f(x_0)|e) + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + he)}{|he|}}_{=0} \end{aligned}$$

Damit ist (1) gezeigt.

Ist $\underbrace{\text{grad } f(x_0)}_{e_0} \neq 0$, so gilt

$$\partial_e f(x_0) = (\text{grad } f(x_0)|e) \stackrel{CS}{\leq} |\text{grad } f(x_0)| \cdot \underbrace{|e|}_{=1}$$

und für $e = \frac{e_0}{\|e_0\|}$ (in Richtung von $\text{grad } f(x_0)$):

$$\partial_e f(x_0) = \left(e_0 \left| \frac{e_0}{\|e_0\|} \right. \right) = |e_0| = |\text{grad } f(x_0)|,$$

was die restlichen Behauptungen von (2) zeigt. □

9.2.8 Beispiel. (1) Für $n(x) := |x|$ ist $\text{grad } n(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$.

(2) Für $g(x) = |x|^2$ ist $\text{grad } g(x) = 2x$.

Wir notieren die

Produktregel für Gradienten: $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x .

$$\implies \text{grad } (fg)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\nabla g(x)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\nabla f(x)}_{\in \mathbb{R}^m}.$$

Folgt aus der Produktregel für reelle Funktionen.

Wir betrachten nun eine weitere spezielle Klasse von Funktionen: **Vektorfelder**.

9.2.9 Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ist f differenzierbar, so definiert man die **Divergenz** von f durch

$$\text{div } f(x) = \sum_{j=1}^m \partial_j f_j(x) \in \mathbb{R}.$$

Mit dem „formalen Vektor“

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \dots \\ \partial_m \end{pmatrix} \quad \text{Nabla}$$

können wir zur Abkürzung schreiben

$$\begin{aligned} \text{grad } g(x) &= \nabla g(x) \quad (g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}) \\ \text{div } f(x) &= (\nabla(f)|x) \quad (f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m) \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j f_j(x) \end{aligned}$$

Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, beide differenzierbar, so ist

$$\begin{aligned} \text{div } (fg)(x) &= \sum_{j=1}^m \partial_j (fg)_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j (f \cdot g_j)(x) \\ &= (\nabla f|g) + f \cdot \text{div } g \end{aligned}$$

9.2.10 Beispiel. (1) Für $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = x$ ist $\text{div } f(x) = m$

(2) Für $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ist

$$\begin{aligned} \text{div } f(x) &= \text{div} \left(\frac{1}{|x|} \cdot x \right) \\ &= \left(\text{grad} \frac{1}{|x|} \middle| x \right) + \frac{1}{|x|} \cdot \text{div } x \\ &= - \left(\frac{1}{|x|^3} x \middle| x \right) + \frac{m}{|x|} = \frac{m-1}{|x|} \end{aligned}$$

9.3 Differentiationsregeln und Mittelwertsätze

Wir starten mit Rechenregeln, die wir in ähnlicher Form aus der eindimensionalen Theorie kennen. Da wir es nun mit Matrizen zu tun haben, müssen wir mit der Reihenfolge aufpassen!

9.3.1 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, sind $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 , $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt $af + bg$ ist in x_0 differenzierbar,

$$D(af + bg)(x_0) = a \cdot Df(x_0) + b \cdot Dg(x_0)$$

Beweis. langweilig und einfach. □

Als nächstes erwähnen wir die Produktregel. Hier ist ein Analogon zum 1-dimensionalen Fall nicht ohne weiteres zu formulieren. Für $f(x), g(x) \in \mathbb{R}^n$ macht $f(x) \cdot g(x)$ keinen Sinn!

9.3.2 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 . Dann ist $f \cdot g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$D(fg)(x_0)y = \underbrace{f(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{Dg(x_0) \cdot y}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{(Df(x_0)y)}_{\in \mathbb{R}} g(x_0).$$

Für die partiellen Ableitungen ergibt sich also

$$\partial_j(fg)(x_0) = f(x_0)\partial_j g(x_0) + \partial_j f(x_0)g(x_0)$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi_f(x) \\ g(x) &= g(x_0) + Dg(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi_g(x) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\varphi_f(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ und } \frac{\varphi_g(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\varphi_g(x) + Df(x_0)g(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + Df(x_0)(x - x_0)g(x_0) + Df(x_0)\varphi_g(x) + \varphi_f(x)g(x) \\ &= (fg)(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)g(x_0) + \varphi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi(x) := f(x_0)\varphi_g(x) + Df(x_0)(x - x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)\varphi_g(x) + \varphi_f(x)g(x)$$

Es ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|x - x_0|} \{Df(x_0)(x - x_0) \cdot Dg(x_0)(x - x_0)\} \\ &= |x - x_0| \underbrace{\left\{ Df(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot Dg(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right\}}_{\text{beschränkt durch } \|Df(x_0)\| \cdot \|Dg(x_0)\|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Und damit

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0. \quad \square$$

9.3.3 Satz (Kettenregel). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in x_0 ; $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f(U) \subset V$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $f(x_0)$. Dann ist $h = g \circ f$ differenzierbar in x_0 , und es gilt:

$$\begin{aligned} Dh(x_0) &= Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbb{R}^p &\longleftarrow \mathbb{R}^n \longleftarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Achtung: Reihenfolge ist beim Produkt der Matrizen sehr wichtig.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} h(x) &= g(f(x)) = g(f(x_0) + \underbrace{Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)}_{=:y}) \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0)) \cdot y + \varphi_g(y) \\ &= h(x_0) + Dg(f(x_0))(Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x) + \varphi_g(y)) \\ &= h(x_0) + \underbrace{Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)} \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi(x) = Dg(f(x_0))\varphi_f(x) + \varphi_g(Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)).$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

Für den ersten Summanden folgt:

$$\frac{1}{|x - x_0|} Dg(f(x_0))\varphi_f(x) = Dg(f(x_0)) \cdot \underbrace{\frac{\varphi_f(x)}{|x - x_0|}}_{\rightarrow 0} \rightarrow Dg(f(x_0)) = 0$$

Für den zweiten Summanden gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - x_0|} \varphi_g(Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)) &= \frac{1}{|x - x_0|} \varphi_g(f(x)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x) = f(x_0) \\ \frac{\varphi_g(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} \cdot \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow x_0$ folgt $f(x) \rightarrow f(x_0)$, also

$$\frac{\varphi_g(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \quad (\star)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} &= \frac{1}{|x - x_0|} |\{Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)\}| \\ &\leq \underbrace{\left| Df(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right|}_{\leq \|Df(x_0)\|} + \underbrace{\frac{|\varphi_f(x)|}{|x - x_0|}}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

$\implies \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$ beschränkt. Wegen (\star) folgt

$$\frac{1}{|x - x_0|} \varphi_g(f(x)) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0,$$

also ist φ wie gewünscht und h differenzierbar. □

9.3.4 Korollar. Aus dem obigen Satz folgt für die partiellen Ableitungen

$$\partial_j h_i(x) = \sum_{k=1}^n \partial_k g_i(f(x)) \cdot \partial_j f_k(x)$$

Wir kommen nun zum zweiten Thema, das in der Kapitelüberschrift angekündigt war: Mittelwertsätze.

9.3.5 Satz (Mittelwertsatz). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $x, y \in U$ und $\{x + t \cdot (y - x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Dann existiert $\nu \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= Df(x + \nu(y - x))(y - x) \\ &= (\nabla f(x + \nu(y - x)))|y - x \end{aligned}$$

($x + \nu(y - x)$ liegt auf der Strecke zwischen x und y .)

Beweis. Betrachte $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(t) := x + t \cdot (y - x)$ und $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h := f \circ g \implies h$ stetig auf $[0, 1]$, differenzierbar auf $(0, 1)$ mit

$$h'(t) = Df(g(t))Dg(t) = (\nabla f(g(t)))|y - x \stackrel{1\text{-dim MWS}}{\implies} \text{Behauptung.}$$

□

9.3.6 Korollar. (1) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $|\partial_j f_i(x)| \leq M$ ($x \in U, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$). Dann gilt für alle $x, y \in U$ mit $\overline{xy} = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$.

$$|f(y) - f(x)| \leq M \cdot \sqrt{nm} \cdot |y - x|.$$

(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und zusammenhängend; sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant auf U :

(3) Unter den Voraussetzungen von (1) gibt es $\xi \in \overline{xy}$ mit $|f(y) - f(x)| \leq \|Df(\xi)\| \cdot |y - x|$.

Beweis. lassen wir weg; folgt einfach aus Satz 9.3.5. □

9.4 Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen; $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **zweimal stetig differenzierbar**, wenn f stetig differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls stetig differenzierbar sind. Entsprechend definiert man induktiv, dass f **p-mal stetig differenzierbar** ist, wenn alle p -ten partiellen Ableitungen

$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_p} f_i, \quad j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, m\}$$

existieren und stetig sind. Dabei kommt es zwar zunächst auf die Reihenfolge der Ableitungen an, nicht aber, wenn Stetigkeit im Spiel ist.

9.4.1 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f_k = \partial_j \partial_i f_k \text{ für } i, j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n.$$

Beweis. Betrachten $n = 1$, d.h. lassen k weg. Durch „Umordnen“ der Koordinaten $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $0 \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zu zeigen ist $\partial_2 \partial_1 f(0) = \partial_1 \partial_2 f(0)$. Da U offen, existiert $r > 0$ mit $U_r(0) \subset U$. Die folgenden Überlegungen sind für $r^2 > s^2 + t^2$ durchführbar; für diese gilt

$$f(s, t) - f(s, 0) - f(0, t) + f(0, 0) = (f(s, t) - f(s, 0)) - (f(0, t) - f(0, 0))$$

mit $g(x) := f(x, t) - f(x, 0)$

$$\begin{aligned} &= g(s) - g(0) \\ &\stackrel{MWS}{=} g'(s_1)(s - 0) \text{ mit } s_1 \in (0, s). \\ &\stackrel{\text{Def. von } g, \partial_1 f}{=} (\partial_1 f(s_1, t) - \partial_1 f(s_1, 0)) \cdot s \\ &\stackrel{h(x) := \partial_1 f(s_1, x)}{=} (h(t) - h(0)) \cdot s \\ &\stackrel{MWS, t_1 \in (0, t)}{=} h'(t_1) \cdot t \cdot s \\ &= \partial_2 \partial_1 f(s_1, t_1) \cdot t \cdot s. \end{aligned}$$

Völlig analog

$$f(s, t) - f(s, 0) - f(0, t) + f(0, 0) = (f(s, t) - f(0, t)) - (f(s, 0) - f(0, 0)) = s \cdot t \cdot \partial_1 \partial_2 f(s_2, t_2)$$

mit $s_2 \in (0, s)$, $t_2 \in (0, t)$. Für $s \neq 0$, $t \neq 0$ folgt

$$\partial_2 \partial_1 f(s_1, t_1) = \partial_1 \partial_2 f(s_2, t_2).$$

Für $s, t \rightarrow 0$ folgt $s_1(s), s_2(s), t_1(t), t_2(t) \rightarrow 0$ und damit

$$\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \partial_1 \partial_2 f(0, 0).$$

□

9.4.2 Korollar. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ p -mal stetig differenzierbar. Dann können in

$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_p} f$$

die partiellen Ableitungen beliebig vertauscht werden.

Beweis. Induktion mit Satz 9.4.1

□

Für $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $p \in \mathbb{N}$ sei

$$C^p(U, \mathbb{R}^n) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ } p\text{-mal stetig differenzierbar}\} \text{ ist ein Vektorraum.}$$

Für $f \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$, $q \in \mathbb{N}$, $q \leq p$, $j = 1, \dots, m$. Setze

$$\partial_j^q f := \underbrace{\partial_j \dots \partial_j}_q f, \quad \partial_j^0 f = f$$

Für $(j_1, \dots, j_q) \in \{1, \dots, m\}^q$ und $i \in \{1, \dots, m\}$ bezeichne α_i die Anzahl der k mit $j_k = i$. Dann gilt

$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_q} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m} f.$$

Für **Multi-Indizes** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ sei im folgenden

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j \text{ die } \mathbf{L\ddot{a}n}g\mathbf{e} \text{ von } \alpha,$$

$$\alpha! := \prod_{j=1}^m \alpha_j! \text{ die } \mathbf{Fakult\ddot{a}t} \text{ von } \alpha,$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}, \text{ f\ddot{u}r } x \in \mathbb{R}^m,$$

$$\partial^\alpha f(x) := \partial_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial_m^{\alpha_m} f(x), \text{ f\ddot{u}r } f \in C^p(U, \mathbb{R}^n), |\alpha| \leq p.$$

Damit k\u00f6nnen wir den Taylorschen Satz in eine elegante mehrdimensionale Form bringen.

9.4.3 Satz (von Taylor). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{p+1}(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$. Dann gilt f\u00fcr alle $x \in U$, f\u00fcr die $\overline{x_0 x} \subset U$ liegt

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha + R_p(x),$$

mit

$$R_p(x) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu(x - x_0)) (x - x_0)^\alpha$$

f\u00fcr ein geeignetes $\nu \in (0, 1)$.

Zur Verdeutlichung geben wir dieses Resultat f\u00fcr $p = 0, 1, 2$ explizit an:

$p = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (\text{grad } f(x_0 + \nu(x - x_0)) | x - x_0) \\ &= f(x_0) + \sum_j \partial_j f(x_0 + \nu(x - x_0)) \cdot (x_j - x_{0,j}) \end{aligned}$$

$p = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (\text{grad } f(x_0) | x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \partial_j \partial_k f(x_0 + \nu(x - x_0)) (x_j - x_{0,j}) \cdot (x_k - x_{0,k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(x_0) + (\text{grad } f(x_0)|x - x_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(Hf(x_0 + \nu(x - x_0))(x - x_0)|x - x_0) \\
 &\quad \text{mit } Hf(\cdot) = (\partial_j \partial_k f(\cdot))_{i,k=1,\dots,m} \text{ Hesse-Matrix.}
 \end{aligned}$$

$p = 2$:

$$f(x) = f(x_0) + (\text{grad } f(x_0)|x - x_0) + \frac{1}{2}(Hf(x_0)(x - x_0)|x - x_0) + R_2$$

Beweis. Wir führen die Aussage auf den 1-dimensionalen Fall zurück. Setze $y = (y_1, \dots, y_m) := x - x_0$, $h(t) := x_0 + ty$, $g : [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := f(x_0 + ty) = f \circ h(t)$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, daß

$$\{x_0 + ty : -\varepsilon \leq t \leq 1 + \varepsilon\} \subset U.$$

Dann: g ist stetig differenzierbar,

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= Dg(t) = Df(h(t)) \cdot Dh(t) && \text{Kettenregel} \\
 &= \sum_{j=1}^m \partial_j f(h(t)) \underbrace{\frac{d}{dt} h_j(t)}_{=y_j} \\
 &= \sum_{j=1}^m y_j \partial_j f(x_0 + ty)
 \end{aligned}$$

Ist $p \geq 1$, so ist auch g' stetig differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
 g''(t) &= Dg'(t) = \sum_{j=1}^m y_j \frac{d}{dt} \partial_j f(x_0 + ty) \\
 &\stackrel{\text{wie oben}}{=} \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^m y_i \partial_i \partial_j f(x_0 + ty) \\
 &\stackrel{\text{formal}}{=} \left(\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \right)^2 f(x_0 + ty)
 \end{aligned}$$

Durch Induktion, für $k \leq p + 1$,

$$g^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \right)^k f(x_0 + ty)$$

Polynomischer Satz:

Für $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\sum_{j=1}^m z_j \right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} z^\alpha.$$

Wir können hier z_1, \dots, z_m durch $y_1 \partial_1, \dots, y_m \partial_m$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} g^{(k)}(t) &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^m y_j \partial_j \right)^k f(x_0 + ty) \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{(y_1 \partial_1, \dots, y_m \partial_m)^\alpha}{\alpha!} \right) f(x_0 + ty) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + ty) \end{aligned}$$

Die Taylorsche Formel für g liefert für $t \in [0, 1]$

$$g(t) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) t^k + \tilde{R}_p(t)$$

mit

$$\tilde{R}_p(t) = \frac{1}{(p+1)!} t^p g^{(p)}(\nu t) \text{ mit } 0 < \nu < 1.$$

Damit:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(1) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \tilde{R}_p(1) \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^m (x_j - x_{0,j}) \partial_j \right)^k f(x_0) + \tilde{R}_p(1) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \partial^\alpha f(x_0) + \tilde{R}_p(1) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) (x - x_0)^\alpha + R_p(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } R_p(x) &= \tilde{R}_p(1) = \frac{1}{(p+1)!} g^{(p+1)}(\nu) \\ &= \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu y) \end{aligned}$$

□

9.5 Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in U$.

9.5. LOKALE EXTREMA DIFFERENZIERBARER FUNKTIONEN 31

9.5.1 Definition. Man sagt, f hat in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), wenn ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \text{ f\"ur alle } x \in U \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f hat in x_0 ein strenges lokales Maximum (Minimum), wenn ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \text{ f\"ur alle } x \in U \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

9.5.2 Satz (Notwendige Bedingung f\"ur Extrema). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$ und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar im Punkt x_0 . Hat f in x_0 ein lokales Maximum (lokales Minimum), so gilt $Df(x_0) = 0$ ($\text{grad } f(x_0) = 0$, $\partial_j f(x_0) = 0$, $j = 1, \dots, m$)

Beweis. Mit f ist auch

$$g_j : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_j(t) = f(x_0 + te_j)$$

bei $t = 0$ differenzierbar und hat dort ein lokales Extremum.

$$\xrightarrow{\text{Analysis I}} 0 = g'_j(0) = \partial_j f(x_0)$$

gilt f\"ur alle $j = 1, \dots, m$. □

Bevor wir zum hinreichenden Kriterium kommen, noch eine Begriffsbildung aus der linearen Algebra:

9.5.3 Definition. Eine $m \times m$ -Matrix A hei\u00dft **positiv definit (positiv semidefinit)**, falls $(Ax|x) > 0$ ($(Ax|x) \geq 0$) f\"ur alle $x \in \mathbb{R}^m$. A hei\u00dft **negativ definit (negativ semidefinit)**, falls $(Ax|x) < 0$ ($(Ax|x) \leq 0$) f\"ur alle $x \in \mathbb{R}^m$.

9.5.4 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$.

a) *Notwendig:* Hat f bei x_0 ein lokales Maximum (Minimum), so gilt $Df(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $Hf(x_0)$ ist negativ semidefinit (positiv semidefinit).

b) *Hinreichend:* Ist $Df(x_0) = 0$ und $Hf(x_0)$ negativ definit (positiv definit), so hat f bei x_0 ein strenges lokales Maximum (strenges lokales Minimum).

Beweis. a) $Df(x_0) = 0$ nach 9.5.2.

Angenommen $Hf(x_0)$ ist nicht negativ semidefinit. Dann existiert $y \in \mathbb{R}^m$, $\|y\| = 1$ mit

$$(Hf(x_0)y|y) > 0.$$

Da f 2-mal stetig differenzierbar ist, existiert $\delta > 0$ so, dass

$$(Hf(x_0)y|y) > 0 \quad \text{f\"ur alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\| < \delta.$$

Satz von Taylor liefert, für $t \in (0, \delta]$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + ty) &= f(x_0) + 0 + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu ty) t^{|\alpha|} y^\alpha \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m t^2 \partial_i \partial_j f(x_0 + \nu ty) t^{|\alpha|} y_i y_j \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{(Hf(x_0 + \nu ty))}_{\in U_\delta(x_0)} y|y > f(x_0) \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

b) Sei $Df(x_0) = 0$ und $Hf(x_0)$ negativ definit \Rightarrow für alle $y \in \mathbb{R}^m, \|y\| = 1$: $(Hf(x_0)y|y) < 0$.

Die Einheitssphäre $\{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| = 1\}$ ist kompakt, und $y \mapsto (Hf(x_0)y|y)$ ist stetig, nimmt also dort ihr Maximum an \Rightarrow Es existiert $\lambda > 0$ mit

$$(Hf(x_0)y|y) \leq -\lambda \quad (\|y\| = 1)$$

Da alle $\partial_i \partial_j f(\cdot)$ stetig sind, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\partial_i \partial_j f(x) - \partial_i \partial_j f(x_0)| \leq \frac{\lambda}{2m^2} \quad \text{für } \|x - x_0\| < \delta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (Hf(x)y|y) &= \sum_{i,j} \partial_i \partial_j f(x_0) y_i y_j + \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j f(x) - \partial_i \partial_j f(x_0)) y_i y_j \\ &\leq -\lambda + m^2 \frac{\lambda}{2m^2} \leq \frac{-\lambda}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \|x - x_0\| < \delta \quad \forall y \neq 0 : (Hf(x)y|y) < 0$.

Mit Taylor für $p = 1$ gilt für $\|x - x_0\| < \delta$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + 0 + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0 + \nu(x - x_0)) (x - x_0)^\alpha \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \underbrace{(Hf(x_0 + \nu(x - x_0))(x - x_0)|x - x_0)}_{< 0} \end{aligned}$$

$f(x) < f(x_0)$. □

9.5.5 Beispiel. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 + y^4 - 4c^2xy$ (mit $c > 0$)

Gesucht sind lokale Extrema von f .

1.Schritt: Ableitungen bestimmen!

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= 4x^3 - 4c^2y; & \partial_2 f(x, y) &= 4y^3 - 4c^2x; \\ \partial_1^2 f(x, y) &= 12x^2; & \partial_2^2 f(x, y) &= 12y^2; \end{aligned}$$

9.5. LOKALE EXTREMA DIFFERENZIERBARER FUNKTIONEN 33

$$\partial_1 \partial_2 f(x, y) = \partial_2 \partial_1 f(x, y) = -4c^2.$$

Lokales Extremum:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_1 f = \partial_2 f &= 0 \\ 4x^3 - 4c^2 y &= 0 = \partial_1 f \\ 4y^3 - 4c^2 x &= 0 = \partial_2 f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \{(0, 0), \pm(c, c)\}$$

2.Schritt: Hesse-Matrix

(a) $(x, y) = (0, 0)$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(0, 0) & \partial_1 \partial_2 f(0, 0) \\ \partial_1 \partial_2 f(0, 0) & \partial_2^2 f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4c^2 \\ -4c^2 & 0 \end{pmatrix} = -4c^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(-4c^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = -4c^2 \left(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = -8c^2 xy$$

$\Rightarrow (Hf(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ hat kein bestimmtes Vorzeichen für alle (x, y) .

$\Rightarrow Hf(0, 0)$ ist nicht semidefinit.

\Rightarrow kein lokales Extremum bei $(0, 0)$.

(b) $(x, y) = \pm(c, c)$

$$Hf(\pm(c, c)) = \begin{pmatrix} 12c^2 & -4c^2 \\ -4c^2 & 12c^2 \end{pmatrix} = 4c^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4c^2 \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= 3x^2 - 2xy + 3y^2 \\ &= x^2 + y^2 + (x - y)^2 > 0 \text{ für } (x, y) \neq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Bei $\pm(c, c)$ liegen strenge lokale Minima vor.