Zusatzaufgaben Funktionentheorie, Blatt 2

1. Sei $u(x,y) := (x+1)y$.
   a) Zeigen Sie: u ist harmonisch auf der gesamten komplexen Ebene.
   b) Bestimmen Sie eine zu u konjugiert harmonische Funktion v.
   c) Geben Sie eine ganze Funktion f mit $\mathbf{Re} f = u$ an.

2. Berechnen Sie
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx.$$

3. Von welcher Gestalt ist eine ganze Funktion f, die
$$|f(z)| \leq A + B|z|^{3/2}$$
auf $\mathbb{C}$ für gewisse Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllt?

4. Sei $f(z) := \frac{1}{z} \cdot \frac{1-2z}{z-2} \cdot ... \cdot \frac{1-10z}{z-10}$. Berechnen Sie
$$\int_{|z|=100} f(z) dz.$$

5. Sei f nichtkonstante ganze Funktion mit
$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$
Zeigen Sie: f besitzt mindestens eine Nullstelle.

6. Seien f und g ganze analytische Funktionen auf $\mathbb{C}$ und es gelte $g(0) \neq 0$ und $|f(z)| \leq |g(z)|$ auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie
$$f(z) = \frac{z(0)}{g(0)} g(z).$$

7. Ermitteln Sie eine konforme Abbildung, die das von den Kreislinien $|z| = 1$ und $|z + \mathbf{i}\sqrt{3}| = 2$ berandete sichelförmige Gebiet D von Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{im} z > 0$ auf das Innere des Einheitskreises abbildet.