Funktionentheorie, 4. Übung

1. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen (d.h. die gebrochen linearen Abbildungen $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$) bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

2. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung $f(z) = (\overline{z})^{-1}$ (Spiegelung am Einheitskreis) über?

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}\,, \quad r > 0\,,$

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}\,,$

   (c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}\,,$

   (d) eine beliebige Gerade durch $z_0 \neq 0$.

3. Man bestimme das Bild

   (a) des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bei der Abbildung $w = \dfrac{z}{1-z}$,

   (b) der rechten Halbebene bei der Abbildung $w = \dfrac{1-z}{1+z}$,

   (c) des ersten Quadranten bei der Abbildung $w = \dfrac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$.

4. Geben Sie die allgemeine Form einer gebrochen linearen Abbildung an, die den Einheitskreis auf die untere Halbebene abbildet.

5. Für die Abbildung $w = \dfrac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ bestimme man das Bild der reellen Achse, der imaginären Achse und des Einheitskreises sowie alle Fixpunkte.

6. Man bestimme eine gebrochen lineare Abbildung $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, die

   (a) die Punkte $-1, \mathbf{i}, 1+\mathbf{i}$ in die Punkte $0, 2\mathbf{i}, 1-\mathbf{i}$,

   (b) die Punkte $-1, P_\infty, \mathbf{i}$ in die Punkte $P_\infty, \mathbf{i}, 1$

   überführt.

7. Man zeige, dass die Hyperbeln $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y = C_1\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = C_2\}$ für beliebige Konstanten $C_1, C_2 > 0$ senkrecht aufeinander stehen.