Funktionentheorie, 2. Übung

1. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der (reellen) Funktion $f(x) = (x^2 - 4x + 5)^{-1}$

   (a) durch reelle Rechnung,

   (b) durch Zerlegung von $z^2 - 4z + 5$ in (komplexe) Linearfaktoren.

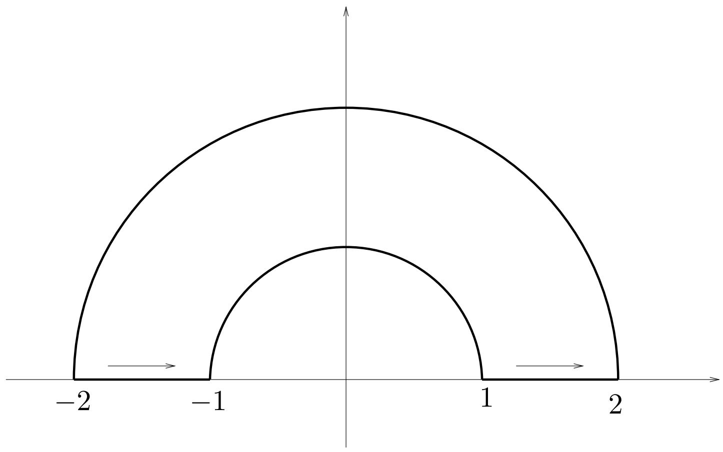
2. Berechnen Sie

   (a) $\displaystyle\int_\beta^\alpha z\,dz\,,\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^z\,dz\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int_0^{(1+\mathbf{i})\pi} \cos z\,dz\,,$ (d) $\displaystyle\int_0^1 |z|\,dz\,.$

3. Berechnen Sie

   (a) **(HA)** $\displaystyle\int_\Gamma z\overline{z}\,dz$, wobei Γ die geradlinige Verbindung von 0 nach $1+\mathbf{i}$ ist,

   (b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{\overline{z}}\,dz\,,$ wobei Γ der gezeichnete Weg ist.



4. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel das Integral

$$I_K := \oint_K \frac{dz}{1+z^2}\,,$$

   wobei K positiv orientiert und durch folgende Gleichungen gegeben ist:

   (a) $|z - \mathbf{i}| = 1\,,$ (b) $|z + \mathbf{i}| = 1\,,$ (c) $|z| = 2\,.$

5. Berechnen Sie das Integral

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz,$$

   wenn C ein positiv orientierter, geschlossener Jordan-Integrationsweg ist, der $a \in \mathbb{C}$ umschließt.

6. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel

   (a) $\displaystyle\oint_{C_1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}\,,$ (b) $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{\sin z}{z+\mathbf{i}}\,dz\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\oint_{C_3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}\,,$

   (d) $\displaystyle\oint_{C_4} \frac{e^{1-z}dz}{z^3(1-z)}\,,$ (e) $\displaystyle\oint_{C_5} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,,$ (f) $\displaystyle\oint_{C_6} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}\,,\ n,m = 1,2,\dots\,,$

   (g) **(HA)** $\displaystyle\oint_{C_7} \frac{\cos z}{(z+\pi)^n}\,dz\,,$

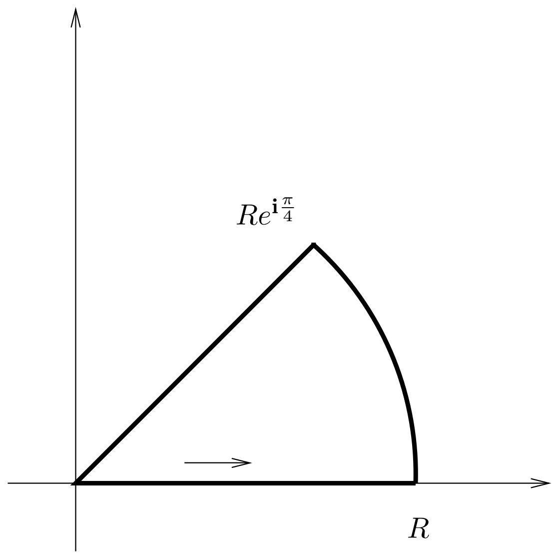
   wobei die geschlossenen (positiv orientierten) Kurven C_i gegeben sind durch

   (a) $|z+1| = 1\,,$ (b) $|z| = 2\,,$ (c) $|z + 2\mathbf{i}| = 3\,,$ (d) $|z| = \frac{1}{2}\,,$ (e) $|z-1| = 1\,,$

   (f) $|z| = r\,,$ wobei $|a| < r < |b|\,,$ (g) $|z+2| = 2\,.$

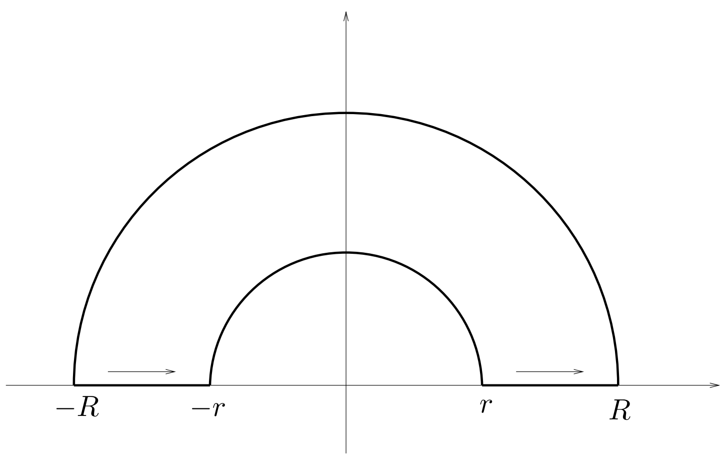
7. Berechnen Sie folgende Integrale mittels Integration der angegeben Funktion $f(z)$ entlang der (in den Abbildungen) gezeigten Kurven und durch Grenzübergang:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx\,,\ \int_0^\infty \sin x^2\,dx\,,\ f(z)=e^{\mathbf{i}z^2}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty$

(b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ f(z)=\frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty\,,\ r \longrightarrow +0$

8. Man entwickle die Funktion $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $0<|z|<1\,,$ (b) $0<|z-1|<1\,,$ (c) **(HA)** $1<|z|<\infty\,,$
   (d) $1<|z-2|<2\,,$ (e) **(HA)** $|z-2|<1\,.$

9. Man entwickle die Funktion $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $1<|z|<2\,,$ (b) $2<|z|<\infty\,,$ (c) $0<|z-2|<1\,,$ (d) **(HA)** $0<|z-1|<1\,.$

10. **(HA)** Man bestimme die Laurentreihe der Funktion $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z-\mathbf{i}-1)}$ im Kreisring $\left\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<\sqrt{2}\right\}\,.$