Funktionentheorie, 1. Übung

1. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ eine hermitesche Matrix. Man zeige, dass die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \overline{z} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

eine Kreislinie oder Gerade ist, falls $\det A < 0$ gilt.

2. Beweisen Sie mit Hilfe der Rechengesetze für komplexe Zahlen, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck π beträgt.

3. Man zeige, dass für komplexe α und β ($\beta \neq 0$) das Gleichheitszeichen in $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ genau dann steht, wenn $\dfrac{\alpha}{\beta}$ reell und nichtnegativ ist.

4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$, (c) **(HA)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$.

5. Beweisen Sie (unter Verwendung der ε-δ-Definition) die Stetigkeit von $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$.

6. Man beweise unter Verwendung der Definition 1.2 der Vorlesung die Summen-, Produkt-, **(HA)** Quotienten- und **(HA)** Kettenregel für die Differentiation von Funktionen.

7. Man untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe der Definition 1.2 der Vorlesung auf Differenzierbarkeit:

   (a) **(HA)** $f(z) = 5\mathbf{i}$, (b) $f(z) = z$, (c) $f(z) = \overline{z}$, (d) **(HA)** $f(z) = 3\,\mathsf{Re}\, z$.

8. Man untersuche folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und gebe gegebenenfalls die Ableitung $f'(z)$ an:

   (a) $f(z) = z\overline{z}$, (b) **(HA)** $f(z) = z^2\overline{z}$, (c) $f(z) = \mathsf{Im}\, z$,

   (d) **(HA)** $f(z) = e^x(\cos y + \mathbf{i} \sin y)$ $(z = x + \mathbf{i}y)$, (e) $f(z) = \sqrt{|xy|}$ $(z = x + \mathbf{i}y)$,

   (f) $f(z) = z\,\mathsf{Re}\, z$, (g) **(HA)** $f(z) = |z|$.

9. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^{-4}} & : \ z \neq 0 \\ 0 & : \ z = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt nicht stetig ist, aber in jedem Punkt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. In welchen Punkten ist f differenzierbar?

10. Bestimmen Sie reelle Konstanten a, b, c, für die die folgenden Funktionen ganze Funktionen sind ($z = x + \mathbf{i}y$):

    (a) $f(z) = x + ay + \mathbf{i}(bx + cy)$,

    (b) **(HA)** $f(z) = \cos x(\cosh y + \mathbf{i} \sinh y) + \sin x \cosh y + b\,\mathbf{i} \sinh y)$.

11. Man bestimme Gebiete, in denen die Funktion $f(z) = |x^2 - y^2| + 2\mathbf{i}|xy|$ analytisch ist ($z = x + \mathbf{i}y$).

12. Die Funktion $f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$, $z = x + \mathbf{i}y$, genüge den Bedingungen

    (a) $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

    (b) $f(z)$ ist ganze Funktion,

    (c) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$,

(d) $f(0) = 0$,

Man bestimme $v(x,y)$.

13. Sei $f(z) = u(z) + \mathbf{i}v(z) = \rho(z)e^{\mathbf{i}\varphi(z)}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Man beweise: Wenn eine der Funktionen $u, v, \rho, \varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist in G, so ist auch $f(z)$ in G konstant.

14. Entwickeln Sie folgende Funktionen in $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe:

    (a) $f(z) = e^z$, $z_0 = \pi\mathbf{i}$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{z - \mathbf{i}}$, $z_0 = 0$,

    (c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-\mathbf{i})^3}$, $z_0 = -\mathbf{i}$, (d) **(HA)** $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$, $z_0 = 0$.

15. Für welche komplexen Zahlen z konvergieren die Reihen

    (a) $1 + (2z+1) + (2z+1)^2 + \ldots$, (b) $1 + 2\dfrac{z-1}{z+1} + 2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \ldots$

    Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz sie Summe der Reihe?

16. Man berechne die ersten drei Glieder der Potenzreihe von $f(z)$ in $z_0 = 0$ für

    (a) **(HA)** $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$, (b) $f(z) = \tan z$.

17. Entwickeln Sie $f(z) = \sin^2 z$ in $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe.

18. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Beziehungen ($z = x + \mathbf{i}y$):

    (a) $\mathsf{Re}\,\sin z = \sin x \cdot \cosh y$, $\mathsf{Im}\,\sin z = \cos x \cdot \sinh y$,

    (b) $|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$,

    (c) **(HA)** $\cos z = \cos x \cosh y - \mathbf{i} \sin x \sinh y$.

19. Auf welchen Teilmengen der komplexen Zahlenebene sind die Funktionen $f_1(z) = e^z$, $f_2(z) = \cos z$, **(HA)** $f_3(z) = \sin z$ reellwertig? Berechnen Sie $f_1\left(\dfrac{\pi}{2}(1+\mathbf{i})\right)$, $f_2(\pi + \mathbf{i})$ und **(HA)** $f_3(2\mathbf{i})$.

20. Man bestimme alle Lösungen $w = u + \mathbf{i}v \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

    (a) $e^w = re^{\mathbf{i}\varphi}$ $(r, \varphi \in \mathbb{R})$, (b) $e^w = 1$, (c) $e^w = \mathbf{i}$,

    (d) $\sin w = \dfrac{1}{2}$, (e) **(HA)** $\cos w = \dfrac{1}{2}$, (f) $\sin w = \mathbf{i}$.

21. Man bestimme (für $k \in \mathbb{Z}$ fixiert) das Bild des Gebietes

    $$G_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}(2k-1) < \mathsf{Re}\, z < \frac{\pi}{2}(2k+1) \right\}$$

    bei der Abbildung $w = f(z) = \sin z$. Ist $f(z)$ dort eineindeutig?

22. Man bestimme das Bild $f(D)$ des Gebietes

    (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > 0\}$ bei der Abbildung $w = f(z) = z^2$,

    (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathsf{Im}\, z < 0\}$ bei der Abbildung $w = f(z) = e^z$,

    (c) **(HA)** $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > |\mathsf{Im}\, z|\}$ bei der Abbildung $f(z) = z^3$.

23. Welche Gebiete $D_n \subset \mathbb{C}$ werden durch $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ auf die "geschlitzte" Ebene $E = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ eineindeutig abgebildet?

24. Bestimmen Sie die Bildmengen folgender Punktmengen bei der Abbildung $w = \dfrac{1}{z}$:

    (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ $(r > 0)$,

    (c) $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \dfrac{1}{2} \right| = \dfrac{1}{4} \right\}$, (d) **(HA)** $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}$.