Probeklausur Funktionentheorie am 16. 1. 2008, mit Lösungen

Arbeitszeit: 90 Minuten

1. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil $u(x,y)$ und $v(x,y)$ der Funktion $f(z) = ze^{-z^2}$, $z = x + \mathbf{i}y$.

   - Es ist $f(z) = (x+\mathbf{i}y)e^{-(x^2-y^2+2\mathbf{i}xy)} = e^{y^2-x^2}(x+\mathbf{i}y)\left[\cos(2xy) - \mathbf{i}\sin(2xy)\right]$, so dass
$$u(x,y) = e^{y^2-x^2}\left[x\,\cos(2xy) + y\,\sin(2xy)\right],$$
$$v(x,y) = e^{y^2-x^2}\left[y\,\cos(2xy) - x\,\sin(2xy)\right].$$

(2 P)

2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

   (a) Wann nennt man eine Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 \in G$ differenzierbar und wann in z_0 holomorph?

   - Differenzierbarkeit: $\exists f'(z_0) := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$
     Holomorphie: $\exists f'(z)\ \forall\, z \in U_\varepsilon(z_0)$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$

   (2 P)

   (b) In welchen Punkten der komplexen Ebene ist die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z\,\mathsf{Re}\,z$ differenzierbar?

   - Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nur in $z_0 = 0$ erfüllt. Dort gilt $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$ mit der in z_0 stetigen Funktion $g(z) = \mathsf{Re}\,z$.
     Also: f ist nur in $z_0 = 0$ differenzierbar.

   (2 P)

3. Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Reihe $1 + 2\dfrac{z-1}{z+1} + 2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \cdots$. Wie lautet dort ihre Summenfunktion?

   - $1 + 2\dfrac{z-1}{z+1} + 2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \cdots = -1 + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n$ konvergiert für $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1$ gegen die Summenfunktion $2\left(\dfrac{1}{1-\frac{z-1}{z+1}}\right) - 1 = z$. Das Konvergenzgebiet ist charakterisiert durch $|z-1| < |z+1| \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2 < (x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; x > 0$ (wobei $z = x + \mathbf{i}y$), d.h. die Reihe konvergiert auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\,z > 0\}$.

(3 P)

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ nach Potenzen von z und nach Potenzen von $z - 1$. Geben Sie jeweils das maximale Konvergenzgebiet der Reihen an. (Randpunkte des Konvergenzgebietes sind **nicht** zu betrachten!)

   - $f(z) = -\dfrac{z}{1-z^2} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}, \quad |z| < 1$ (2 P)

- $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1-z}{2}}$

$= \frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-1)^n\,, \quad 0 < |z-1| < 2$ (3 P)

5. Berechnen Sie folgende Integrale (Ergebnisse in der Form $z = x + \mathbf{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$):

(a) $\int_{\Gamma_1} |z|^2\, dz$, Γ_1 - oberer Halbkreis von 2 nach 0 mit dem Mittelpunkt 1 und dem Radius 1

- Mit der Substitution $z = e^{\mathbf{i}\varphi} + 1$, $dz = \mathbf{i}\, e^{\mathbf{i}\varphi}\, d\varphi$ und $|z|^2 = 2(1+\cos\varphi)$ ist das Integral gleich

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{i}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)\, d\varphi \\ = \;& 2\mathbf{i}\int_0^{\pi}\left[\cos\varphi + \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right] d\varphi - 2\int_0^{\pi}\left[\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right] d\varphi \\ = \;& \pi\mathbf{i} - 4\,. \end{aligned}$$

(3P)

(b) $\int_{\Gamma_2} \frac{z}{\bar{z}}\, dz$, Γ_2 - Viertelkreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2,\ \mathsf{Re}\, z \geq 0,\ \mathsf{Im}\, z \geq 0\}$ von 2 nach $2\,\mathbf{i}$

- Mit der Substitution $z = 2\, e^{\mathbf{i}\varphi}$, $dz = 2\,\mathbf{i}\, e^{\mathbf{i}\varphi}\, d\varphi$ ist das Integral gleich

$$2\,\mathbf{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3\mathbf{i}\varphi}\, d\varphi = \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3\pi\mathbf{i}}{2}} - 1\right) = -\frac{2(1+\mathbf{i})}{3}\,.$$

(2P)

(c) $\int_{|z-1|=4} \frac{\sin z}{z - \mathbf{i}}\, dz$

- Nach der Cauchyschen Integralformel (oder dem Residuensatz) ist

$$\int_{|z-1|=4} \frac{\sin z}{z-\mathbf{i}}\, dz = 2\pi\mathbf{i}\,\sin\mathbf{i} = \pi\left(e^{-1} - e\right)\,.$$

(2P)

(d) $\int_{|z-1|=a} \frac{z\, dz}{(z+2)(z-2\mathbf{i})^2}$ für die Fälle $a = 1$ und $a = 5$.

- Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral gleich Null im Falle $a = 1$. (1P)
- Im Falle $a = 5$ ist nach dem Residuensatz

$$\int_{|z-1|=5} f(z)dz = 2\pi\mathbf{i}\,(\mathrm{res}_{-2}f + \mathrm{res}_{2\mathbf{i}}f) = 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{-2}{(-2-2\mathbf{i})^2} + \frac{2}{(2\mathbf{i}+2)^2}\right) = 0\,.$$

(2P)

6. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^2}$ für $\alpha > 0$.

- Aus $\operatorname{res}_{\mathbf{i}} \dfrac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2} = \dfrac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{z+\mathbf{i}}\Big|_{z=\mathbf{i}} = \dfrac{e^{-\alpha}}{2\mathbf{i}}$ und dem Residuensatz folgt für $R > 1$

$$\pi\, e^{-\alpha} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2}\,dz + \int_{|z|=R,\, \mathsf{Im}\, z\geq 0} \frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2}\,dz = 2\int_0^R \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^2} + I_R$$

  mit

$$|I_R| \leq \frac{R}{R^2-1}\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\varphi}\,d\varphi \leq \frac{R\pi}{R^2-1} \longrightarrow 0 \ (R \longrightarrow \infty).$$

  Es folgt

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi\, e^{-\alpha}}{2}.$$

(5P)

7. Es seien $G \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}\, z > 0\}$ ein Gebiet, $\overline{G} \cap \mathbb{R} = [a,b]$, $a < b$, und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph sowie $f : G \cup (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, wobei $f(x) \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in (a,b)$. Wir definieren $G^* = G \cup (a,b) \cup \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \overline{\zeta} \in G\right\}$ und

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & : \quad z \in G \cup (a,b)\,, \\ \overline{f(\overline{z})} & : \quad \overline{z} \in G\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $g : G^* \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

Hinweis: Nach dem Satz von Morera ist $f : G^* \longrightarrow \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn $\int_\Delta f(z)\,dz = 0$ gilt für alle Dreieckskurven $\Delta \subset G^*$.

- Für $z, z_0 \in \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \overline{\zeta} \in G\right\}$ gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \overline{\lim_{z\to z_0} \frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}} = \overline{f'(\overline{z_0})}\,.$$

(2 P)

- Um zu zeigen, dass g auch auf (a,b) holomorph ist, verwenden wir den Satz von Morera. Ein Dreieck $\Delta \subset G^*$, welches (a,b) schneidet, kann man so in drei Teildreiecke zerlegen, dass das Innere jedes dieser Dreiecke entweder zu G oder zu $\left\{\zeta \in \mathbb{C} : \overline{\zeta} \in G\right\}$ gehört. Aus Stetigkeitsgründen folgt, dass die Integrale über $g(z)$ entlang dieser Dreiecke verschwinden.

(3 P)