ALGEBRA, 8. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. (a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist das Zentrum $Z(S_n)$ der symmetrischen Gruppe S_n trivial?
   (b) Man zeige, dass S_n, $n > 1$, erzeugt wird durch $(1\ 2)$ und $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$.
   (c) Ist n eine Primzahl, so wird S_n erzeugt durch $(1\ i)$ und $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ für jedes $2 \leq i \leq n$. S_4 wird nicht durch $(1\ 3)$ und $(1\ 2\ 3\ 4)$ erzeugt.

2. Man zeige, dass es keine einfachen Gruppen der folgenden Ordnungen n gibt.
   (a) $n = 30$;
   (b) **(HA)** $n = 56$;
   (c) **(HA)** $n = 105$;
   (d) **(HA)** $n = 132$.

3. Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und $X \subset G$. Der Normalisator von X in G ist definiert als $N(X) := \{g \in G : gX = Xg\}$. Zeigen Sie
   a) **(HA)** $N(X)$ ist stets eine Untergruppe von G.
   b) **(HA)** U ist genau dann ein Normalteiler von G, wenn $N(U) = G$.
   c) **(HA)** U ist stets Normalteiler in $N(U)$. Ist U Normalteiler in einer Untergruppe V von G, dann gilt $V \subset N(U)$. (M.a.W. $N(U)$ ist die größte Untergruppe von G, in der U Normalteiler ist.)
   d) Es gilt $|\{gUg^{-1} : g \in G\}| = |G : N(U)|$.
   f) Ist U eine p-Sylow-Gruppe der endlichen Gruppe G, dann gilt $N(N(U)) = N(U)$. **(HA)** Außerdem ist p kein Teiler von $|N(U) : U|$.

4. Es soll gezeigt werden, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 144 gibt. Man nehme dazu im Folgenden an, dass G einfach ist mit $|G| = 144$.
   (a) Man zeige: $\alpha(2) = 9$ und $\alpha(3) = 16$.
   (b) Man zeige: Es gibt zwei 3-Sylowgruppen P und Q von G, so dass $P \cap Q = T$ die Ordnung 3 hat.
   (c) Es sei $N(T)$ der Normalisator von T in G. Man zeige: $P \cup Q \subset N(T)$ und folgere $|N(T)| = 18$, 36, 72 oder 144.
   (d) Man schließe sukzessive alle diese Fälle aus.

5. Untersuchen Sie: Sei G eine endliche, auflösbare Gruppe. Dann gibt es eine Kette von Untergruppen
$$\{e\} = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset U_n = G$$
   mit U_{i-1} ist ein Normalteiler in U_i, und die Faktorgruppe U_i/U_{i-1} ist zyklisch von Primzahlordnung $(i = 1, \ldots, n)$.