ALGEBRA, 7. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Sei U eine Untergruppe von G, sei $M = G/U$ die Menge der Rechtsnebenklassen von U in G. Durch $(u, gU) \mapsto ugU$ wird eine Aktion von U auf der Menge M erklärt.

   (a) Man zeige, dass U Normalteiler in G ist genau dann, wenn jede Bahn bei obiger Aktion nur aus einem Element besteht.

   (b) Sei G eine endliche Gruppe, sei p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt. Man zeige, dass jede Untergruppe U von G vom Index p ein Normalteiler ist.

2. (a) Sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe, also $|G| = p^n$. Sei m ein Teiler der Ordnung von G. Man zeige: G hat eine Untergruppe der Ordnung m.

   (Hinweis: Induktion nach n. Man finde einen Normalteiler U der Ordnung p.)

   (b) Sei D_4 die Diedergruppe vom Grad 4, also die Gruppe der Ordnung 8, die durch Erzeugende α und β gegeben ist mit Relationen $\alpha^2 = e = \beta^4$ und $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^3$. Man zeige, dass die Elemente α und β^2 jeweils eine Untergruppe der Ordnung 2 erzeugen, die nicht konjugiert zueinander sind.

3. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n.

   (a) Man zeige: Sind alle Sylowgruppen von G Normalteiler, so ist G isomorph zum Produkt seiner Sylowgruppen.

   (b) Man beschreibe (bis auf Isomorphie) alle Gruppen von der Ordnung 1225.

4. Eine Gruppe G der Ordnung 55 operiere auf einer Menge X mit 18 Elementen. Zeigen Sie, dass X mindestens 2 Punkte besitzt, deren G-Bahn Länge 1 hat.
   Besitzt X auch im Falle $|X| = 39$ sicher einen solchen Punkt?

5. Sei G endliche Gruppe, p Primzahl und p^k ein Teiler von $|G|$. Dann ist die Anzahl der p-Sylow-Gruppen ein Teiler von $p^{-k}|G|$. Warum?

6. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung $2p$, p prim.