ALGEBRA, 3. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. Untersuchen Sie die Behauptungen
   (a) Ist die Ordnung von U gleich 2, so ist U Normalteiler.
   (b) Ist der Index von U gleich 2, so ist U Normalteiler.
   (c) Ist U die einzige Untergruppe der Ordnung k, so ist U Normalteiler.
2. Ist U eine Untergruppe von G, und ist V eine Untergruppe von U, so ist V auch eine Untergruppe von G. Für Normalteiler gilt dies i.A. nicht. Finden Sie ein Gegenbeispiel!
3. Beweisen Sie: Sind U, V Normalteiler in einer Gruppe $(G, \cdot)$, so auch UV.
4. Beweisen Sie: Für eine echte Untergruppe U einer endlichen Gruppe G ist
   (a) $\bigcap_{g \in G} gUg^{-1}$ stets ein Normalteiler von G.
   (b) $\bigcup_{g \in G} gUg^{-1}$ stets von G verschieden.
5. Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe jeder endlichen Gruppe G der Ordnung $|G| > 2$ nicht trivial ist!