Analysis I, 8. Übung

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Beweisen Sie:

   (a) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \longrightarrow a$ und $a > p$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > p$ $\forall\, n \geq n_0$.

   (b) Aus $x_n \in \mathbb{R}$, $b = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ und $b < q$ folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < q$ $\forall\, n \geq n_0$.

   (c) **(HA)** Formulieren und beweisen Sie eine zu (b) analoge Aussage für den Limes Inferior.

2. Man bestimme $\underline{\lim}\, x_n$ und $\overline{\lim}\, x_n$:

   (a) $x_n = (-1)^n \left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$ (b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ (c) $x_n = n^{(-1)^n}$

   (d) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$ (e) **(HA)** $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} \cos \dfrac{2n\pi}{3}$ (f) **(HA)** $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$

   (g) **(HA)** $x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{2n} + \cos(n\pi)$

3. Es seien $(x)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ reelle und beschränkte Zahlenfolgen. Man zeige, dass dann gilt:

   (a) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

   (b) **(HA)** $\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

   (c) $\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\, (x_n y_n) \leq \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

   (d) **(HA)** $\underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\, (x_n y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

4. Zeigen Sie: Gilt $x_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = 1$, so ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent.

5. Es seien $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende **Vergleichskriterien** für Zahlenreihen:

   (a) Es existiere der Grenzwert $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

   - Ist $q < \infty$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
   - Ist $q > 0$, so folgt aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
   - Im Fall $q \in (0, \infty)$ konvergieren bzw. divergieren beide Reihen gleichzeitig.

   (b) **(HA)** Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $\forall\, n > n_0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

6. Untersuchen Sie mit Hilfe von Vergleichskriterien auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{n} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$

7. Untersuchen Sie mit Hilfe des Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums auf Konvergenz ($z \in \mathbb{C}$):

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$ (d) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan n}{2} z\right)^n$

8. Beweisen Sie: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ für alle $p > 1$. Gilt die Umkehrung?

9. Beweisen Sie: Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergent, so konvergieren auch die Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

10. Es gelte $a_n \longrightarrow a$ und $a_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}|$ konvergiert.

11. Geben Sie die Summe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

(a) $a_n = \frac{1}{(d+n)(d+n+1)} \quad (-d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) **(HA)** $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$