Analysis I, 7. Übung

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Für folgende Zahlenfolgen sind Zahlen a und $N(\varepsilon)$ zu finden, so dass $|x_n - a| < \varepsilon \, \forall \, n > N(\varepsilon)$ und $\forall \, \varepsilon > 0$ gilt.

   (a) $x_n = \dfrac{n}{n^3+n^2+1}$ (b) **(HA)** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $x_n = \dfrac{1+\sqrt{n}}{n^3}$ (d) **(HA)** $x_n = \dfrac{\sin n}{2+\sqrt[3]{n^5}}$

   (e) $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$ (f) $x_n = \dfrac{1}{n^2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ (g) $z_n = \dfrac{1}{n} + 25\mathbf{i}$ (h) $z_n = \left(\dfrac{\mathbf{i}}{n}\right)^n$

   (i) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 1)$ (j) **(HA)** $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4$ (k) **(HA)** $z_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathbf{i})\right)^n$

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

   (a) $x_n = \dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$ (b) $x_n = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$ (c) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

   (d) $x_n = \dfrac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ (e) $x_n = (n+1)^k - n^k$ $(0 < k < 1)$

   (f) $x_n = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i n^i}{\sum\limits_{i=0}^{j} b_i n^i}$ $(k, j \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{C},\ a_k \neq 0, b_j \neq 0)$ (g) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

   (h) **(HA)** $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ (i) $x_n = \sqrt[n]{4^n+3^n+2^n}$

   (j) $x_n = (1+n)^{\frac{1}{n}}$ (k) $x_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^n\right)^{\frac{1}{n}}$ $(a_i > 0)$ (l) $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$ $(a > 1)$

   (m) **(HA)** $x_n = \dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$ (n) $x_n = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

   (o) **(HA)** $x_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$ (p) **(HA)** $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$

   (q) **(HA)** $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ (r) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (s) $x_n = n - \sqrt[3]{n^3-1}$ (t) $x_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

   (u) $x_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$ (v) $x_n = \left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ $(a \in \mathbb{R})$

3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren die Grenzwerte

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$, (b) **(HA)** $\lim\limits_{n\to\infty} n!z^n$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n}$?

4. Verwenden Sie die binomische Formel, um zu zeigen, dass

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

   gilt, und berechnen Sie damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

5. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

   (a) $x_n = \underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$ $(c > 0)$

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}_0,\ a > 0,\ x_0 > 0)$

6. Untersuchen Sie mit der Definition 3.4 der Vorlesung, ob folgende Zahlenfolgen Cauchy-Folgen sind:

   (a) $x_n = \frac{1}{n}$, (b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, (c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

7. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie:

   (a) Eine Punktfolge $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ von Punkten aus $Z = X \times Y$ konvergiert genau dann in einer der Metriken aus Aufgabe 6 der 6. Übung, wenn sie in den anderen zwei Metriken konvergiert.

   (b) Die Abbildung $d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wobei man $X \times X$ mit jeder der Metriken d aus Aufgabe 6 der 6. Übung für $Y = X$ versehen kann.

8. Geben Sie jeweils eine Bijektion zwischen folgenden Mengen an:

   (a) $(0, 1]$, $[0, \infty)$ (b) $(0, 1]$, $(0, 1)$.

   Kann die Abbildung sogar stetig gewählt werden?

9. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \\ \max\left\{\frac{1}{q} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\} & , x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass g unstetig in allen rationalen Punkten und stetig in allen irrationalen Punkten ist.

10. Wir betrachten das Intervall $(0, \infty)$, versehen mit der üblichen Metrik, und die Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty), x \mapsto x^2$. Zeigen Sie, dass f stetig ist

    (a) anhand der Definition der Stetigkeit,

    (b) mit Hilfe der Folgenstetigkeit: Aus $x_n \to x$ folgt, dass $f(x_n)$ gegen $f(x)$ konvergiert,

    (c) mit Umgebungsstetigkeit: Das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge U ist offen.