Analysis I, 6. Übung

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$|d(x,z)-d(y,w)| \le d(x,y)+d(z,w) \quad \forall\, x,y,z,w \in X$$

und

$$|d(x,z)-d(y,z)| \le d(x,y) \quad \forall\, x,y,z \in X\,.$$

2. Zeigen Sie, dass folgende Räume (X,d) metrische Räume sind:

   (a) $X=\mathbb{C}^n$, $n\in\mathbb{N}$, $d(z,w)=d_\infty(z,w):=\max\{|z_k-w_k| : k=1,\dots,n\}$ mit $z=(z_1,\dots,z_n)$, $w=(w_1,\dots,w_n)$,

   (b) $X=\mathbb{C}^n$, $n\in\mathbb{N}$, $d(z,w)=d_1(z,w):=\sum_{k=1}^{n}|z_k-w_k|$,

   (c) $X=\mathbb{C}$, $d(z,w)=\sqrt{|z-w|}$.

3. Es seien (X,d) ein metrischer Raum und $A,B\subset X$. Zeigen Sie:

   (a) **(HA)** Aus $A\subset B$ folgt $\overline{A}\subset\overline{B}$.

   (b) Es gilt $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. Gilt auch $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}$?

   (c) $\overline{A}$ ist abgeschlossen und $\operatorname{int}(A)$ ist offen.

   (d) Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen in X, die A umfassen, ist gleich der Abschließung von A, d.h.

$$\overline{A}=\bigcap_{F\in\mathcal{F}(A)}F\,,\ \text{wobei } \mathcal{F}(A)=\left\{F\in\mathcal{P}(X) : A\subset F \text{ und } \overline{F}=F\right\}\,.$$

4. Zeigen Sie: Sind $A\subset\mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $x=\sup A$, so ist $x\in\overline{A}$.

5. Zeigen Sie: Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist auch (X,d_1) mit

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

ein metrischer Raum.

6. Es seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume und $Z=X\times Y$. Zeigen Sie, dass dann auch (Z,d) ein metrischer Raum ist, wobei für $z_j=(x_j,y_j)$

   (a) $d(z_1,z_2)=\max\{d_X(x_1,x_2),d_Y(y_1,y_2)\}$,

   (b) $d(z_1,z_2)=d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2)$,

   (c) **(HA)** $d(z_1,z_2)=\sqrt{[d_X(x_1,x_2)]^2+[d_Y(y_1,y_2)]^2}$.

7. Finden Sie die Ableitung A', die Abschließung $\overline{A}$ und das Innere $\operatorname{int}(A)$ folgender Mengen $A\subset\mathbb{R}$:

   (a) $A=\mathbb{N}$, (b) $A=(0,1)\cup(1,2)$, (c) $A=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$,

   (d) $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n},\frac{n}{n+1},\frac{2n}{n+1}\right\}$, (e) **(HA)** $A=\left\{\frac{2n-3}{3n+2} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

8. Zeigen Sie, dass $X_0\subset X$ genau dann zusammenhängend ist, wenn keine zwei offenen Mengen $A,B\subset X$ mit $A\cap B=\emptyset$, $A\cap X_0\neq\emptyset$, $B\cap X_0\neq\emptyset$ und $X_0\subset A\cup B$ existieren.

9. Untersuchen Sie, ob folgende Mengen in $\mathbb{R}$ abgeschlossen, offen, beschränkt, perfekt, kompakt oder zusammenhängend sind:

   (a) $\mathbb{N}$, (b) $\left\{\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (c) $(0,1]$, (d) $[0,1]$, (e) $[0,1] \cup \{2\}$.

10. (a) Es seien $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ und $U_n = \left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, und $U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein gewisses $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Wählen Sie aus der Überdeckung $\{U_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ von A eine endliche Teilüberdeckung aus.

    (b) Kann man aus der Überdeckung $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $B = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine endliche Teilüberdeckung auswählen?

11. Wir betrachten die Teilmenge $A = \left\{r \in \mathbb{Q} : 2 < r^2 < 3\right\}$ des metrischen Raumes $(\mathbb{Q}, d)$ mit $d(r,s) = |r-s|$. Zeigen Sie, dass A in $\mathbb{Q}$ offen, abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist. Ist die Menge $B = \left\{r^2 : r \in \mathbb{Q},\ 2 \le r \le 3\right\}$ in $\mathbb{Q}$ abgeschlossen?

12. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

    (a) Zwei disjunkte abgeschlossene Mengen sind getrennt.

    (b) Zwei disjunkte offene Mengen sind getrennt.

    (c) **(HA)** $U_r(x_0)$ und $X \setminus K_r(x_0)$ sind getrennt, wobei $x_0 \in X$, $r > 0$.

(Z1) Zeigen Sie, dass jede nichtleere perfekte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

(Z2) Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Zahlen aus $[0,1]$, bei denen in irgendeiner Dezimalbruchdarstellung die Ziffer 7 nicht vorkommt, perfekt ist.

(Z3) Wir schreiben die abzählbare Menge der rationalen Zahlen als Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, d.h. $\mathbb{Q} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, und definieren $U_n = (x_n - 2^{-n}, x_n + 2^{-n})$. Dann ist $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{Q}$. Ist dies auch Überdeckung von $\mathbb{R}$?