Analysis I, 4. Übung

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Geben Sie für folgende Situationen alle Abbildungen $f : I \to M$ an und entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $I = \{a_1, a_2\}, M = \{1, 2\}$, (b) $I = \{a\}, M = \{l, m, n\}$, (c) $I = \{a, b\}, M = \{3\}$.

2. Es sei in der Menge W der Wale (die einmal gelebt haben bzw. noch leben) eine Vorschrift $y = \gamma(x)$ gegeben durch

   (a) y ist Vater von x, (b) y ist Sohn von x, (c) y ist Großvater von x,

   (d) y ist älteste Tochter von x.

   Ist γ eine Funktion von W in W?

3. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \longrightarrow B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $A = B = \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$
   (b) $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$, $x \mapsto e^x$
   (c) $A = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$
   (d) $A = B = \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$
   (e) $A = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$
   (f) $A = B = \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$
   (g) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$
   (h) $A = B = \mathbb{R}$, $x \mapsto |2x - 4|$

   Geben Sie gegebenenfalls maximale Teilmengen A_1 und B_1 von A bzw. B an, so dass $f : A_1 \longrightarrow B_1$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B_1 \longrightarrow A_1$.

4. Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

   (a) Aus $A \subset B$ folgt $f(A) \subset f(B)$.
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (d) Geben Sie ein Beispiel für $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ an.

5. Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) $f : X \longrightarrow Y$ ist injektiv.
   (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$.
   (c) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
   (d) $f^{-1}(f(A)) = A \quad \forall A \subset X$.
   (e) **(HA)** Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \supset B$ ist $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

6. Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subset X$, $A_1, B_1 \subset Y$.

   (a) Überprüfen Sie die Inklusionen

   $$f(f^{-1}(A_1)) \subset A_1 \quad \text{und} \quad (\mathbf{HA})\ f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

   Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass i.A. keine Gleichheit gilt.

   (b) Untersuchen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

   $$f^{-1}(A_1 \cup B_1) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(B_1) \quad \text{und} \quad (\mathbf{HA})\ f^{-1}(A_1 \cap B_1) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(B_1).$$

7. Beweisen Sie: Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ injektiv bzw. surjektiv, so gilt dies auch für $g \circ f : A \longrightarrow C$. Kann man für die entsprechenden Aussagen die Bedingungen an f und/oder g abschwächen?

8. Sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt. Mit $\langle a, x \rangle$ bezeichnen wir das Skalarprodukt der Vektoren a und $x \in \mathbb{R}^3$. Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \langle a, x \rangle\, x$ injektiv bzw. surjektiv?