Analysis I, 3. Übung

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $(2+3\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})$, (b) $(1+\mathbf{i})^3$, (c) $(1+2\mathbf{i})^6$, (d) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) $\mathbf{i}^k$ $(k \in \mathbb{Z})$,

   (f) $\dfrac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$ $(a,b \in \mathbb{R},\ (a,b) \neq (0,0))$, (g) $\dfrac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$, (h) $(a+b\mathbf{i})^n$ $(a,b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

2. Zeigen Sie für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung
$$2(|z|^2+|w|^2) = |z-w|^2 + |z+w|^2.$$

3. Sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \log_2 3 + \mathbf{i}\log_2 6$ irrational?

4. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) $\frac{1}{2}+\frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}$, (c) $\sin\alpha + \mathbf{i}(1-\cos\alpha)$ $(\alpha \in [-\pi,\pi))$, (d) $1+\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}$.

5. Es sei $z = x+\mathbf{i}y = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ mit $x,y \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [-\pi,\pi)$, $r > 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\overline{z}$, (b) $\dfrac{1}{\overline{z}}$, (c) z^2, (d) $\mathbf{i}z$, (e) $z\overline{z}$, (f) $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|$, **(Z)** $\dfrac{1}{1-z}$ für $z \neq 1$.

6. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre

   (a) $(1+\mathbf{i})^{10}$, (b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) $(-1+\mathbf{i})^5$, (d) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$, (e) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^9$.

7. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z = \dfrac{1}{\overline{z}}$, (b) $\mathsf{Re}\,(z^2) = 1$, (c) $\mathsf{Re}\,\dfrac{1}{z} = c$, (d) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leq 3$, (e) $2 < |z| < 4$,

   (f) $|z-z_0| = |z-z_1|$, (g) $|z+3|+|z-3| \leq 10$,

   wobei $c \in \mathbb{R}$ und $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind.

8. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^3 = -1$, (b) $z^4+1 = 0$, (c) $z^3+2 = 2\mathbf{i}$, (d) $z^4 = -8+8\sqrt{3}\,\mathbf{i}$,

   (e) $z^2 = -3-4\mathbf{i}$, (f) $z^4-2\mathbf{i}z^2+2\mathbf{i} = 1$, (g) $z^2+4\mathbf{i}z+5 = 0$, (h) $|z|-z = 1+2\mathbf{i}$.

9. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

   (a) z^4+1, (b) z^3+1, (c) z^4-16.

10. Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^n = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

11. Zeigen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha,\, n\alpha \notin \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ die Beziehung
$$\left(\frac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+\mathbf{i}\tan(n\alpha)}{1-\mathbf{i}\tan(n\alpha)}.$$

12. Es seien $p(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $p(\overline{z_0}) = 0$ gilt.

(Z) Lösen Sie die Gleichung $z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$ in $\mathbb{C}$. Ermitteln Sie hieraus explizite Formeln für $\sin\frac{2\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$.