Analysis I, 2. Übung

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

   (a) die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

   (b) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$,

   (c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die Ungleichung $2^n > n^2$ erfüllt?

3. Beweisen Sie, dass $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar ist.

4. Man zeige durch vollständige Induktion, dass aus $\#A = n$ folgt $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Zeigen Sie, dass $n^3 - 7n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

6. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen Primteiler besitzt! Zeigen sie anschließend:
   Jede natürliche Zahl ist entweder eine Primzahl oder ein Produkt von Primzahlen!