Analysis II, 18. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Man zeige für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, dass die Grenzwerte $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ und $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ existieren, $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)$ aber nicht:

   (a) $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha,-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$

   (b) **(HA)** $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$

2. Consider the function $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)\sin\dfrac{1}{x_1 x_2}$. Prove that $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x) = 0$ holds, but the limits $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ and $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ do not exist.

3. **(HA)** Berechnen Sie

   (a) $\lim\limits_{x\to\Theta} \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}$, (b) $\lim\limits_{x\to(0,a)} \dfrac{\sin(x_1 x_2)}{x_1}$ $(a \in \mathbb{R})$, (c) $\lim\limits_{x\to(\infty,a)} \left(1 + \dfrac{1}{x_1}\right)^{\frac{x_1^2}{x_1+x_2}}$.

4. Wo sind folgende Funktionen stetig?

   (a) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ (b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle$, wobei $a \in \mathbb{R}^n$

   (c) **(HA)** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = x \times b$, wobei $b \in \mathbb{R}^3$.

5. **(HA)** Man zeige, dass $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & : & x \neq \Theta \\ 0 & : & x = \Theta \end{array} \right\}$ in $x_0 = \Theta$ nicht stetig ist, obwohl f in $x_0 = \Theta$ längs jeder Halbgeraden $\{(t\cos\alpha, t\sin\alpha) : 0 \le t < \infty\}$ stetig ist.

6. Bestimmen Sie die Jacobimatrizen der folgenden Abbildungen in allen Punkten des Definitionsgebietes. Wo sind diese Funktionen differenzierbar?

   (a) $f(x,y,z) = (xyz + y^2, \sin y + \cos z)$, (b) **(HA)** $f(x,y,z) = x + yz$,

   (c) $f(x) = (2x, x^2, x^3 + 7\sin x)$, (d) **(HA)** $f(x,y,z) = (x + e^{\cos y}, \sin x, x\tan z)$,

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

   (f) **(Z)** $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

7. **(HA)** Given $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & : & x \neq (0,0) \\ 0 & : & x = (0,0) \end{array} \right.$, prove that the partial derivatives $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ and $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ exist but do not coincide.

8. Es sei $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$. In welche Richtung ist die Ableitung im Punkt $x_0 = (1,1)$

   (a) gleich Null, (b) am größten, (c) am kleinsten?

9. Man leite $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}$ in Richtung der Geraden

   (a) $x_2 = x_1$, (b) $x_2 = 2x_1 + 1$, (c) **(HA)** $x_2 = 0$, (d) **(HA)** $x_1 = 0$

   ab. Man gebe die Richtung der Geraden so vor, dass die Richtungsableitung im Punkt

   (a) $(1,1)$, (b) $(1,3)$, (c) $(1,0)$, (d) $(0,1)$ positiv wird.

10. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x^2, xy^2, xy)$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g(a, b, c) = (\sin(a), \cos(abc))$. Berechnen Sie die Ableitung von $h = g \circ f$ mit der Kettenregel.

11. Man untersuche folgende Funktionen auf Extremwerte

    (a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2$ (b) **(HA)** $f(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}(x_1^2 - 2x_2^2)$

12. **(HA)** Klassifizieren Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

    nach Maxima, Minima und Sattelpunkten in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

13. Bestimmen Sie die Extremstellen von $f(x_1, x_2)$ unter den angegebenen Nebenbedingungen

    (a) $f(x_1, x_2) = 6 - 4x_1 - 3x_2$, wobei $x_1^2 + x_2^2 = 1$,

    (b) $f(x_1, x_2) = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2$, wobei $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4}$.

14. Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von $f(x_1, x_2)$ im angegebenen Gebiet:

    (a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2$, $\quad x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_1 + x_2 \geq -3$

    (b) **(HA)** $f(x_1, x_2) = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin(x_1 + x_2)$, $\quad 0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$

15. Man bestimme von folgenden, implizit gegebenen Funktionen (a) $x_2 = f(x_1)$ bzw. (b) $x_3 = f(x_1, x_2)$ die Extremstellen:

    (a) $x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 = 0 \quad (a > 0)$

    (b) **(HA)** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 11 = 0$

16. Man zerlege die Zahl $a > 0$ in drei nichtnegative Summanden, so dass deren Produkt möglichst groß wird. Man beweise mit dem gewonnenen Resultat, dass das arithmetische Mittel dreier Zahlen $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d.h.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\,.$$

17. **(HA)** Unter allen in eine Kugel einbeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!