Analysis II, 17. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Zeigen Sie: Bei einer π-periodischen Funktion verschwinden die Fourier-Koeffizienten mit ungeraden Indizes.

2. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-periodische Funktionen. In welchem Zusammenhang stehen die Fourier-Koeffizienten von f und g, wenn

   (a) $g(x) = f(-x)$, (b) $g(x) = f(x+h)$ $(h = \text{const} \in \mathbb{R})$?

3. Geben Sie, ausgehend von dem trigonometrischen System $\left(e^{\mathbf{i}nx}\right)_{n=-\infty}^{\infty}$, ein Orthonormalsystem (ONS) zur Entwicklung von Funktionen der Periode $2\ell \neq 2\pi$ an, d.h. ein ONS bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}\,dx\,.$$

   Wie berechnen sich die entsprechenden Fourier-Koeffizienten?

4. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourier-Reihe und geben Sie die Summe dieser Fourier-Reihe an:

   (a) $f(x) = |\cos x|$, (b) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \pi + x & : \quad -\pi \le x \le 0\,, \\ \pi - x & : \quad 0 < x \le \pi\,, \end{cases}$

   (c) $f(x) = x\cos x$, $-\pi \le x \le \pi$, (d) **(HA)** $f(x) = x\sin x$, $-\pi \le x \le \pi$,

   (e) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $0 \le x \le 2\pi$ (rückwärtige Sägezahnkurve).

5. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und 2π-periodisch, so gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|+1)^2 |\widehat{f}_n|^2 < \infty\,,$$

   und die Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{\mathbf{i}nx}$ ist absolut konvergent.

6. Ermitteln Sie die Fourierreihen der Funktionen $f_i : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = |x|$$

   Und nutzen Sie diese Darstellungen zur Berechnung der Summen folgender Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

7. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ (b) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$ $(\alpha > 0)$

   (d) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$ $(\alpha < 0,\ \beta \in \mathbb{R})$ (e) **(HA)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$

   (f) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ (h) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$

   (i) **(HA)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$ (j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ **(Z)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

8. Zeigen Sie:

   (a) Konvergiert $\int_a^\infty |f|$, so konvergiert auch $\int_a^\infty f$. (Man sagt , $\int_a^\infty f$ konvergiert **absolut**.)

   (b) Sind $|f(x)| \leq g(x)\ \forall\, x \in [a, \infty)$ und $\int_a^\infty g$ konvergent, so konvergiert $\int_a^\infty f$ absolut.

9. Untersuchen Sie folgende Integrale auf Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\, dx$ (b) **(HA)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x\, dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x}\, dx$ $(\alpha, \mu \in \mathbb{R})$

10. Berechnen Sie die Mantelfläche F und das Volumen V des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen der Funktion $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ um die x-Achse entsteht.

11. Berechnen Sie die folgenden Cauchyschen Hauptwerte:

    (a) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^e \frac{dx}{x}$ (b) v.p. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}$ (c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$

    (d) **(HA)** v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$ (e) **(HA)** v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x\, dx$

12. Zeigen Sie die Konvergenz des Fresnelschen Integrals:

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$

13. Give an example for a sequence of functions f_n with the following properties:

    i) f_n converges uniformly to zero on $[0, \infty)$.

    ii) The integral $\int_0^\infty f_n(x)\, dx$ exists for every $n \in \mathbb{N}$.

    iii) The integrals $\int_0^\infty f_n(x)\, dx$ do not converge to zero as $n \to \infty$.

14. Man stelle durch eine Reihe dar:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\, dt$, (b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$, (c) **(HA)** $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.