Analysis II, 16. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Sei
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} = 0 \qquad (c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \text{ fest}).$$
Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = 0$$
im Intervall $(0,1)$ mindestens eine Lösung x besitzt.

2. Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g, h : [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar. Ferner sei $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt.$$
Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung F'.

3. Are the following integrals positive or negative? Prove your answers!
$$\text{a)} \quad \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx, \quad \text{b)} \quad (\mathbf{HA}) \int_{-1}^{1} x^3 2^x \, dx.$$

4. Erinnern Sie sich an die Rekursionsformel für die unbestimmten Integrale $I_m := \int \sin^m x \, \mathrm{d}x$ aus der 15. Übung, und berechnen Sie damit $A_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$.
Zeigen Sie $A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}$. Wie kann man dies zur Approximation von $\pi/2$ verwenden?

5. Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be differentiable and injective. Show that the integrals of f and f^{-1} are related via the following identity:
$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(s) ds = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(s) ds.$$
Hint: Use Exercise 2.

6. Zeigen Sie, dass für eine 2π-periodische, auf $[-\pi, \pi]$ Riemann-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt
$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx\,.$$

7. Berechnen Sie mit Hilfe von Ober- und Untersummen
$$\int_0^{\alpha} x \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha > 0 \text{ fest}).$$

8. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stimme auf $[a,b]$ mit f außer an endlich vielen Stellen überein. Man zeige, dass auch g Riemann-integrierbar ist und dass
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

9. Berechnen Sie folgende Riemann-Stieltjes-Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x\, d\mu(x)$, wobei $\mu(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x = -1 \\ 0 & : \quad -1 < x < 2 \\ 1 & : \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

(b) **(HA)** $\displaystyle\int_{0}^{2} x\, d\mu(x)$, wobei $\mu(x) = \begin{cases} -1 & : \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & : \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & : \quad x = \frac{3}{2} \\ 2 & : \quad \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\, d\mu(x)$, wobei $\mu(x) = \begin{cases} x+2 & : \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 2 & : \quad -1 < x < 0 \\ x^2+3 & : \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$