Analysis II, 14. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Let the function $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ be uniformly continuous. Prove that $\lim_{x\to b} f(x)$ exists, i.e. there is a continuous extension of f at the point b.
   Let $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ be differentiable and its derivative g' be bounded. Does there exist a continuous extension of g at the point b?

2. Man untersuche die Funktionenfolgen (f_n) auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:
   (a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < \infty$, (b) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$, $-\infty < x < \infty$,
   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in [0, 1]$, (d) **(HA)** $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$,
   (e) **(HA)** $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x}$, $x \in [0, 1]$.

3. Seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x+1/n$. Dann ist (f_n), aber weder (f_n/n) noch (f_n^2) gleichmäßig konvergent.

4. Let X be a nonempty set, let $f_n, g_n, f, g : X \to \mathbb{K}$ be functions such that f_n converges uniformly to f (we write $f_n \rightrightarrows f$) as well as $g_n \rightrightarrows g$, and let $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Prove
   (a) $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$.
   (b) If f_n and g_n are bounded then $f_n g_n \rightrightarrows fg$. Is the boundedness condition essential?
   (c) **(HA)** If $|f(x)| \geq \alpha > 0$ holds for all $n \in \mathbb{N}$ and all $x \in X$ then the functions $1/f_n$ tend uniformly to $1/f$. Is this condition essential?

5. Beweisen Sie den Satz von Dini:
   Seien X ein kompakter metrischer Raum, $f_n : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die punktweise monoton nicht wachsend gegen eine stetige Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren, d.h. es gilt für jedes $x \in X$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ dass $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, sowie $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Dann gilt schon $f_n \rightrightarrows f$.
   (HA) Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass sowohl die Monotoniebedingung, die Stetigkeit der Grenzfunktion als auch die Kompaktheit des Definitionsgebiets wesentliche Voraussetzungen sind.

6. Man untersuche folgende Reihen auf gleichmäßige Konvergenz:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-q, q)$, $0 < q < 1$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$,
   (c) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, $x \in [-1, 1]$, (d) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$, $x \in [0, 1]$,
   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, bzw. **(Z)** $x \in \mathbb{R}$,
   (f) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.