Analysis II, 13. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Welches in die Ellipse $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ einbeschriebene achsenparallele Rechteck besitzt den größten Flächeninhalt?

2. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : [2, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

3. Bestimmen Sie für folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Unstetigkeitsstellen, Nullstellen, Nichtdifferenzierbarkeitspunkte, Extremwerte, Wendepunkte, Monotonieintervalle, Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle und Intervalle mit Vorzeichenkonstanz sowie evtl. Asymptoten, das Periodizitäts- und Symmetrieverhalten:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1} & : \ |x| \neq 1 \\ 1 & : \ |x| = 1 \end{cases}$

   (b) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in (0, a] \\ \sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}} & : \ \text{sonst} \end{cases} \qquad (a > 0)$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\cos x}{\cos 2x} & : \ \text{sonst} \end{cases}$

4. Der *Sinus Hyperbolicus* ist wie folgt definiert:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

   Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion und führen Sie eine Kurvendiskussion durch.

   (HA) Untersuchen Sie analog den Cosinus Hyperbolicus.

5. Es seien $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ und $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei konvexe Funktionen. Man zeige: Ist g monoton wachsend, so ist auch die Funktion $g \circ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex.

   (Z) Ist die Monotoniebedingung an g wesentlich? Wenn ja, ist sie notwendig?

6. Es seien $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 0$ und $f' : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass dann auch $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ monoton wachsend ist.

7. Bestimmen Sie im Intervall $[0, \pi]$ alle Teilintervalle, in denen $f(x) = \frac{1}{8}\cos^2 x$ konvex ist.

(Z) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ e^{-x^{-2}} & : \ x \neq 0 \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$ ein Minimum hat, die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ xe^{-x^{-2}} & : \ x \neq 0 \end{cases}$$

bei $x = 0$ dagegen kein Extremum besitzt, obwohl $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.