Analysis II, 12. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{\mathbf{i}z}{n}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\mathbf{i}n)^n z^n}{n!}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n$, wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der Zahl n bezeichnet,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^2}$ $(a \neq 0,\, a \in \mathbb{C})$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^{\sqrt{n}}}$ $(a > 0)$ (f) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}$ $(a, b > 0)$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{i})^n z^{2n}}{n!}$ (i) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$

   (j) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$ (k) $\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n (z - \mathbf{i})^n$

   (l) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$ **(Z)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\sin n}\right)^n$

2. Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mögen den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 haben. Geben Sie Abschätzungen für den Konvergenzradius R der folgenden Reihen an:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n$

3. Geben Sie für folgende Funktionen die Potenzreihenentwicklung im Punkt z_0 und den Konvergenzbereich an. Verwenden Sie dazu bekannte Taylorreihen!

   (a) $f(z) = e^{-z^2}$, $z_0 = 0$ (b) $f(z) = a^z := e^{z \ln a}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \pi$ $(a > 0)$

   (c) $f(z) = \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \pi$ (d) $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 2$

   (e) $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$, $z_0 = 0$, **(HA)** $z_0 = 1$ (f) **(HA)** $f(z) = \sin z$, $z_0 = \pi$

4. Man berechne die Summe folgender Potenzreihen mittels bekannter Taylorreihen:

   (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ (b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$

5. Bestimmen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

   (a) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$ (b) **(HA)** $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$

   (c) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ (d) **(HA)** $f(0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cot x$

6. Man zeige, dass $x = 0$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $e^x = 1 + x$ ist.

7. Wenden Sie auf die Funktion $f(x) = x^2$ und das Intervall $[a, b]$ den speziellen Mittelwertsatz $f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b-a))(b-a)$ an und bestimmen Sie ein $\vartheta \in (0, 1)$.

8. Beweisen Sie unter Verwendung des speziellen Mittelwertsatzes

   (a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, (b) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

9. Beweisen Sie folgende Version der l'Hospitalschen Regel:

   Es seien $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ($a = -\infty$ ist zugelassen), $g'(x) \neq 0 \; \forall\, x \in (a, b)$, $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ und $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \infty$. Dann gilt

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A\,.$$

10. Man versuche unter Verwendung der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte zu berechnen:

    (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) = x + \sin x \cos x$, $g(x) = f(x) e^{\sin x}$.

11. Man gebe für folgende Funktionen die Taylorentwicklung bis $(x - x_0)^n$ und das Restglied $R_n(f; x_0, x)$ nach Lagrange und Cauchy an:

    (a) $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x - x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 3$ (b) $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$, $n = 3$

12. Man schätze den Fehler ab, der bei folgenden Näherungen entsteht:

    (a) $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, $0 \leq x \leq 1$ (b) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}$

13. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

    (a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(\sqrt[7]{\dfrac{x^3 + x}{1 + x^3}} - \cos \dfrac{1}{x^3} \right)$, (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{1}{e} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x \right]^x$.

    Benutzen Sie dazu die Potenzreihendarstellung von $\ln(1 + x)$ und $(1 + x)^\alpha$.

(Z) Man zeige, dass die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ streng monoton wachsend ist.