Analysis II, 11. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Differenzierbarkeit über dem Intervall I. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung der Funktion f.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & : \ x \neq 0\,, \\ 0 & : \ x = 0\,, \end{cases}$ $I = (-1, 1)$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \ x \neq 0\,, \\ 1 & : \ x = 0\,, \end{cases}$ $I = \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = \ln x$, $I = (0, \infty)$ (d) $f(x) = x \sin x$, $I = (0, \infty)$

   (e) **(HA)** $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $I = (-1, 1)$ (f) **(HA)** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $I = (0, 1)$

   (g) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0\,, \\ 0 & : \ x = 0\,, \end{cases}$ $I = \mathbb{R}$ bzw. $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. Beweisen Sie: Wenn f über dem Intervall I differenzierbar und f' auf I beschränkt sind, so ist f auf I gleichmäßig stetig. (Gilt auch die Umkehrung, d.h., wenn f differenzierbar und gleichmäßig stetig auf I ist, so ist f' dort beschränkt?)

3. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Definition:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ (b) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$

4. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen (im natürl. Definitionsgebiet):

   (a) $f(x) = 2^{\sin(3x)}$ (b) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $x \in [-1, 1)$

   (c) $f(x) = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + a^2} \right]$ (d) $f(x) = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ (e) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

   (f) $f(x) = a^{(a^x)}$ $(a > 0)$ (g) $f(x) = x^{x^x}$ $(x > 0)$ (h) **(HA)** $f(x) = a^{(x^a)}$ $(a, x > 0)$

   (i) $f(x) = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$ $(\varphi, \psi > 0$ differenzierbar$)$

5. Ermitteln Sie die erste Ableitung von $y(x) = u(x)^{v(x)}$, wobei u und v differenzierbare Funktionen mit $u(x) > 0$ sind.

6. Ermitteln Sie die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion $f(x) = |x|^3$ und zeigen Sie, dass $f'''(0)$ nicht existiert.

7. Sind folgende Funktionen im Punkt $x = 0$ differenzierbar? (Wenn ja, ist f' in $x = 0$ stetig?)

   (a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$ (d) **(HA)** $f(x) = \begin{cases} x \arctan \dfrac{1}{x} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$

   (e) **(HA)** $f(x) = 2^{|x|}$

8. Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital folgende Grenzwerte:

   (a) Die beiden Grenzwerte aus Übung 9, Aufgabe 5, Gleichung (1).

   (b) $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha \ln x$ $(\alpha > 0)$ (c) $\lim\limits_{x \to +0} x^x$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

   (e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$ (f) **(HA)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$ (g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$