Analysis II, 10. Übung

SS 2014 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Verwenden Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ zur Berechnung folgender Grenzwerte:
   (ohne Verwendung der l'Hospitalschen Regel)
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ (b) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$ (c) **(HA)** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$
   (d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^2}$
   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte der Gestalt 1^∞:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan x)^{\cot x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\cot x}$ (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$
   (d) **(HA)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$ (e) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ (f) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

3. Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ die Beziehungen
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \tag{1}$$
   gelten, und verwenden Sie diese zur Berechnung von
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\log_{10} x - 1}{x-10}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a, b, c > 0)$.

4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Unstetigkeitsstellen, sowie ihr Verhalten in $\pm\infty$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen!
   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}$ (b) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{|x^3-4x|}$.

5. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit im Intervall I!
   (a) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$ $I = [-1, 1]$ (b) $f(x) = \ln x$ $I = (0, \infty)$
   (c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $I = (0, \pi)$ (d) $f(x) = x \sin x$ $I = [0, \infty)$
   (e) **(HA)** $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ $I = (0, 1)$.

6. Beweisen Sie: Wenn f auf $[a, \infty)$ definiert und stetig ist, und weiterhin $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert und endlich ist, dann ist f auf $[a, \infty)$ gleichmäßig stetig.

7. Besitzt die Gleichung $2^x = 4x$ außer der Lösung $x_0 = 4$ noch weitere Lösungen?

8. Es sei $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ stetig. Dann gibt es ein $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = x$. Dieses x nennt man einen Fixpunkt von f.