Analysis I, 0. Übung

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. (a) Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an:

$$x^2 + 6x, \quad z^2 - \frac{z}{7}.$$

   (b) Leiten Sie die Lösungsformel für quadratische Gleichungen her.

2. (a) Wir betrachten die unendliche Summe $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots$. Welche der folgenden Rechnungen ist richtig?
   - $S = \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \cdots = 0$
   - $S = 1 \underbrace{-1+1}_{=0} \underbrace{-1+1}_{=0} \underbrace{-1+1}_{=0} \underbrace{-1+1}_{=0} - \cdots = 1$
   - $S = 1 - \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots)}_{=S} = 1 - S, \quad$ also $S = \frac{1}{2}$

   (b) Was ergeben folgende Rechnungen?
   - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$
   - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

3. (a) Wir wollen den Wert eines Polynoms vierten Grades in einem Punkt x_0 ermitteln. Welche der folgenden Berechnungsvarianten ist günstiger?
   - $ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + e$
   - $\{[(ax_0 + b)x_0 + c]x_0 + d\}x_0 + e$

   (b) Stellen Sie das geeignetere Verfahren schematisch dar. Wie kann daran der Wert der Ableitung des Polynoms in diesem Punkt abgelesen werden?
   Erproben Sie das Schema an den Beispielen

$$3x^4 + 2x - 1,\ x_0 = -1 \quad \text{und} \quad (\mathbf{HA})\ 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,\ x_0 = \frac{1}{2}.$$

4. Finden Sie alle Polynome $p(x)$ vierten Grades, die folgende Bedingungen erfüllen:
   (i) $p(x) = p(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
   (ii) $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
   (iii) $p(0) = 1$
   (iv) p(x) hat genau 2 lokale Minimumspunkte x_1, x_2, wobei $|x_1 - x_2| = 2$ gilt.

5. Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

6. Dividieren Sie
   (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$, (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

7. Vereinfachen Sie so weit wie möglich
   a) $\log_2 a - \log_2 b$ b) $(\log_a a^2)^{-3}$ c) **(HA)** $\log_a x^2 + \log_a \frac{1}{x^2}$

8. Bestimmen Sie Definitionsbereich und Lösungsmenge folgender Gleichungen
   a) $\log_3 x = 2$ b) $2 \ln x - \ln(x + 6) = 0$
   c) **(HA)** $\log_2(x - 1) = 0$ d) **(HA)** $\log_2(x^2 - 1) = 3$.