

Das Notwendigste zur Aussagenlogik:

Eine **Aussage** ist ein Satz, von dem man sinnvollerweise behaupten kann, dass er wahr (w) oder falsch (f) ist. Eine Aussage ist also immer entweder wahr oder falsch, aber nie beides gleichzeitig.

Beispiel. *Die Sonne ist ein Planet; $4 > 3$; $-1 = 2$;*

Gegenbeispiel. *Analysis macht Spass.*

Ist p eine Aussage, so erhält man durch ihre **Negation** die neue Aussage $\neg p$ (nicht p). $\neg p$ ist wahr genau dann, wenn p falsch ist. Die zugehörige **Wahrheitstafel** schaut wie folgt aus:

p	$\neg p$
w	f
f	w

Sind p, q Aussagen, so können diese durch die **Konjunktion** \wedge (und) bzw. die **Disjunktion** \vee (oder) zu neuen Aussagen verknüpft werden:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

$p \wedge q$ ist genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind. $p \vee q$ ist genau dann falsch, wenn sowohl p als auch q falsch sind (nicht ausschließendes oder).

Die **Implikation** $p \Rightarrow q$ (p impliziert q bzw. q folgt aus p) ist genau dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Also: Die Gültigkeit von $p \Rightarrow q$ gibt uns nur dann Infos über den Wahrheitswert von q , falls p wahr ist.

Ist $p \Rightarrow q$ wahr, so ist p **hinreichend** für q .
 Genauso ist q **notwendig** für p .

Die **Äquivalenz** $p \Leftrightarrow q$ (p ist äquivalent zu q)
 ist genau dann wahr, wenn p sowohl notwen-
 dig als auch hinreichend für q ist. D.h. es gilt
 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Äquivalente Aussagen sind also logisch gleichwertig.

Die folgenden wichtigen Äquivalenzen ergeben sich sofort aus den zugehörigen Wahrheitstafeln:

$$(i) \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$(ii) \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Die **Quantoren** \exists (es existiert), $\exists!$ (es existiert genau ein) und \forall (für alle) werden wie folgt benutzt: Ist X eine Menge und $E(x)$ eine Eigenschaft, die für $x \in X$ gelten kann, so bedeutet

$$\exists x \in X : E(x),$$

dass mindestens ein $x \in X$ existiert, für das $E(x)$ gilt;

$$\exists! x \in X : E(x),$$

dass genau ein $x \in X$ existiert, für das $E(x)$ gilt;

$$\forall x \in X : E(x),$$

dass $E(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Für die Negation erhalten wir:

$$(i) \quad \neg(\exists x \in X : E(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg E(x)$$

$$(ii) \quad \neg(\forall x \in X : E(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : \neg E(x)$$