Analysis I, 6. Hausaufgabe

Abgabetermin: Erste Übung im 2. Semester

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:

   (a) $x_n = n\left(1 - \sqrt{(1-\frac{a}{n})(1-\frac{b}{n})}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, n hinreichend groß ,

   (b) $x_n = \dfrac{n^\beta}{a^n}$, $a > 1$, $\beta \geq 1$, (c) $x_n = \displaystyle\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j}\right)$, (d) $x_n = \displaystyle\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$.

2. Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren oder sogar absolut konvergieren:

   (a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{6} + \dots$ (b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{27} + \dfrac{8}{81} + \dots$ (c) $1 + \dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \dots$

   (d) $1 + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{300} + \dots$ (e) $1 + \dfrac{2}{2!} + \dfrac{4}{3!} + \dfrac{8}{4!} + \dots$ (f) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6^2} \pm \dots$

3. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n < e^2$ gilt.

4. Für $n > 1$ gilt offenbar $\dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)}$. Man leite daraus eine obere und untere Schranke für die Summe der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ab.

5. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC habe die Katheten a und b und die Hypotenuse c. Von C wird das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes wird das Lot auf die Kathete b, von dessen Fußpunkt das Lot auf c, dann wieder auf b usw. gefällt. Das Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Zeigen Sie, dass die Summe der Längen $h_i\,(i = 1, 2, \dots)$ aller Lote gleich $\dfrac{ab}{c-b}$ ist. (Hinweis: Drücken Sie h_i mit Hilfe eines der Winkel im Dreieck aus!)

6. Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

   (a) Wie hoch wird der Turm?

   (b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

   (c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

7. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 8. und 9. Übung.

8. Gegeben sei eine Folge (t_n), deren Teilfolgen für $n_k = 2k$, $n_k = 2k+1$ und $n_k = 3k$ konvergieren. Zeigen Sie, dass dann auch (t_n) konvergiert.