Analysis I, 3. Hausaufgabe

Abgabetermin: 11./13.12.2013

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

   (a) $x \mapsto |\sin x|$, (b) $x \mapsto x^2 - 2x$, (c) $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, (d) $x \mapsto 2^{|x|}$.

   Geben Sie gegebenenfalls maximale Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ an, so dass $f : A \longrightarrow B$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B \longrightarrow A$.

2. Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $A_1, B_1 \subset Y$. Zeigen Sie: Aus $A_1 \subset B_1$ folgt $f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(B_1)$.

3. Für welche Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $(z, w) \mapsto (az + b, cw + d)$ surjektiv, injektiv, bijektiv?

4. Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $F : A \longrightarrow A \times B$, $x \mapsto (x, f(x))$ stets injektiv ist.

5. Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Man finde zwei Funktionen $f : M \longrightarrow M$ und $g : M \longrightarrow M$, für die $f \circ g \neq g \circ f$ gilt. (Verwenden Sie die Permutationsschreibweise!)

6. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 4. Übung.

7. Die Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ seien beschränkt, und die Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ seien fixiert. Ermitteln Sie $\sup(\lambda A + \mu B)$, wobei $\lambda A + \mu B = \{\lambda a + \mu b : a \in A, b \in B\}$.

8. Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Menge $\{q \in \mathbb{Q} : a < q < b\}$ abzählbar ist.

9. Sind folgende Mengen abzählbar

   (a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, (b) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, (c) die Menge der irrationalen Zahlen, (d) $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

10. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden gleichmächtigen Mengen an !

    (a) $[0, 1)$, $(0, 1]$, (b) $(0, 1)$, $[0, 2]$, (c) $[0, 1]$, $(-\infty, \infty)$.

11. Zeigen Sie: Aus $A \sim C$ und $B \sim D$ folgt $A \times B \sim C \times D$.

12. Beweisen Sie mit Hilfe der binomischen Formel, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$