Analysis I, 2. Hausaufgabe

Abgabetermin: 27./29.11.2013

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos[(2k-1)x] = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi : m \in \mathbb{Z}\}\,.$

   Interpretieren Sie die Beziehungen (a) und (b).

2. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt

   (a) $2^n > 2n+1\,,$ (b) $1 \le \dfrac{9}{n^2-8n}\,,$ (**Z**) $\dfrac{n!}{n^n} < \dfrac{1}{2^n}$?

3. Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

   $f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2).$

   Beweisen Sie die explizite Darstellung

   $f_n = \dfrac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi}$ mit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. Beweisen Sie: Es seien $r, z, w \in \mathbb{R}$ und $r < z + w$. Dann existieren $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < z$, $q < w$ und $r < p + q$.

5. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}\,,$ (b) $\dfrac{(1-\mathbf{i})^5 - 1}{(1+\mathbf{i})^5 + 1}\,.$

6. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) $-1\,,$ (b) $2 - 2\mathbf{i}\,,$ (c) $(1+\mathbf{i})^3\,,$ (d) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\,,$ (e) $\dfrac{2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\,,$ (f) $\dfrac{(1+\mathbf{i}\sqrt{3})^5}{(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^3}\,,$

   (g) $\dfrac{\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi}{\cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

   Berechnen Sie die vierten Potenzen dieser Zahlen sowohl unter Verwendung der binomischen Formel und als auch unter Verwendung der Formel von Moivre.

7. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

   (a) $z = \overline{z}\,,$ (b) $z = \mathbf{i}\overline{z}\,,$ (c) $\mathsf{Im}\,(z^2) = 1\,,$

   (d) $0 \le \mathsf{Im}\, z \le 2\pi$ und $|\mathsf{Re}\, z| < 1\,,$ (e) $|z| < 1 + \mathsf{Re}\, z\,.$

8. Sei $z = \dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

9. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^5 = 1\,,$ (b) $z^3 - \mathbf{i} = 0\,,$ (c) $z^6 = 64\,,$ (d) $\overline{z}^3 = -8\,,$

   (e) $\mathbf{i}z^2 - 2z - \mathbf{i} + 1 = 0\,,$ (f) $(z - 3\mathbf{i})^6 + 64 = 0\,,$ (g) $\overline{z} = z^3\,,$ (h) $z^2 + 4\mathbf{i}z = 5\,.$

10. Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \sqrt{3} + \frac{1+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\,\mathbf{i}$ irrationale Zahlen sind.

11. Drücken Sie $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ $(n \in \mathbb{N}\,,\ \varphi \in \mathbb{R})$ mittels Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus.

12. Das Polynom $p(z) = z^5 - 10z^4 + 64z^3 - 176z^2 + 228z - 136$ hat die Nullstellen $z_1 = 2$ und $z_2 = 3 + 5\mathbf{i}$. Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von $p(z)$!

    Bestimmen Sie ebenfalls die Zerlegung in komplexe Linearfaktoren sowie die Zerlegung in reelle Linear- und ggf. quadratische Faktoren des Polynoms $q(z) = (z^3 - 1)(z^3 + 8)\,.$