Analysis I, 1. Hausaufgabe

Abgabetermin: 30.10./01.11.2013

WS 2013/14 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Vereinfachen Sie:

   (a) $\dfrac{16-49m^2}{16-28m}$, (b) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$, (c) $\dfrac{a}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a+b}$,

   (d) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{\frac{a+1}{a-1}+1}$, (e) $\dfrac{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-(\frac{1}{x})^2}$, (f) $\left(a^{-x}\right)^{-2y}$, (g) $\left(-a^{-3}\right)^{2n}$ $(n\in\mathbb{N})$,

   (h) $\left(\dfrac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}}\right)^4\cdot\left(\dfrac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}}\right)^{-6}$, (i) $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{2}{3}}$, (j) $a^{\frac{5}{3}}:a^{\frac{2}{5}}$,

   (k) $\sqrt[5]{a^2b^2}\,\sqrt[3]{ab^4}\,ab^{-1}$, (l) $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$, (m) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

2. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken $A(x)$ die quadratische Ergänzung an:

   (a) $\dfrac{16}{49}x^2-\dfrac{16}{21}x$, (b) w^2+1.

3. Für welche $x\in\mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

   (a) $\dfrac{\sqrt[n]{x^{2n-3}}\cdot(\sqrt[n]{x})^{n+7}}{\sqrt[n]{x^4}}=x^3$, $n\in\mathbb{N}$, (b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$,

   (c) $(\log_2 x)^{-1}-(\log_2 x-1)^{-1}<1$, (d) $\sin x+\cos x=1$?

4. Formulieren Sie die Folgerung 1.14 der Vorlesung für $\inf A$ und beweisen Sie diese.

5. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 1. Übung.

6. Zeigen Sie: Für eine beliebige beschränkte Menge $A\subset\mathbb{R}$ und eine beliebige Menge $B\subset A$ gilt $\inf A\le\inf B\le\sup B\le\sup A$.

7. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+7}{7n-4}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+100n^2}{4n^3+1}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{10^n}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}$.

8. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $\sin(x^2+2x)$, (b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$, (c) $x\ln x-x$, (d) $x\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

9. Ermitteln Sie folgende unbestimmte Integrale:

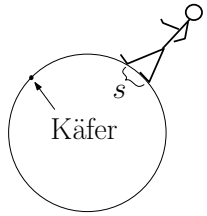
   (a) $\displaystyle\int x\sin x^2dx$, (b) $\displaystyle\int(\sin x\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos x)dx$, (c) $\displaystyle\int x^2e^{-2x}dx$.

10. Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die den Ursprung enthält und durch die Graphen der Funktionen

    $y=(x+1)^3$, $y=-1$, $y=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

    eingeschlossen wird.

Zusatz

Ein kleiner Mann mit Schrittlänge s umrundet wiederholt einen Kreis mit Umfang Eins. Ein kleiner Käfer sucht einen Schlafplatz auf der Kreislinie, auf dem er nicht vom Wanderer ertreten wird.

Unter welchen Voraussetzungen an s findet er einen solchen Platz?