

Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Prüfungsklausur

**Allgemeine Hinweise:** Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!  
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

**Zugelassene Hilfsmittel:** gedruckte Formelsammlungen, Vorlesungsskripts der 3 Semester ohne Anhänge,  
Arbeitsblätter zur Vorlesung, beliebige Taschenrechner

1. (4 Punkte)

Berechnen Sie die Richtungsableitung von  $U(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$  im Punkt  $(x, y, z) = (4, 6, 15)$  in Richtung  $\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  !

2. (9 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung  $y' + \frac{x}{x^2+3}y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$  !

3. (11 Punkte)

Die über dem Intervall  $-\pi \leq t \leq \pi$  durch  $g(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |t| \leq \pi \end{cases}$  definierte Funktion

werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll mit  $f(t)$  bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die periodisch fortgesetzte Funktion!

b) Entwickeln Sie die Funktion  $f(t)$  in eine Fourierreihe, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten bis  $k=2$  !

**Hinweis:**  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

4. (7 Punkte)

Berechnen Sie die Masse der mit Material der Dichte  $\rho(x, y, z) = 30 - x^2 - y^2 - z^2$  belegten Kugel mit Radius 5 um den Koordinatenursprung!

5. (9 Punkte)

Bei der Kurve  $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2$  handelt es sich um eine Ellipse. Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Punkte dieser Ellipse, die den kleinsten bzw. größten Abstand vom Koordinatenursprung haben!

**Hinweis:** Es ist zweckmäßig, die Extrema des Quadrats des Abstands vom Koordinatenursprung zu bestimmen!

**Zusatz** (+5 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art von  $U(x, y, z) = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + 13}$  über dem Geradenstück vom Koordinatenursprung zum Punkt  $(3, 3, -3)$  !