

Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!

Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: gedruckte Formelsammlungen, Vorlesungsskripts der 3 Semester ohne Anhänge, Arbeitsblätter zur Vorlesung, beliebige Taschenrechner

1. (5 Punkte)

Untersuchen Sie das Vektorfeld $\vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (x+1)yz \\ (y+1)zx \\ (z+1)xy \end{pmatrix}$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit!
Handelt es sich um ein Potenzialfeld?

2. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y^{(6)}(x) - 5y^{(4)}(x) - 36y''(x) = 0$!

3. (11 Punkte)

Die über dem Intervall $-\pi \leq t \leq \pi$ durch $f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ |t| + 1, & \frac{\pi}{2} < |t| \leq \pi \end{cases}$ definierte Funktion

werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll überall mit $f(t)$ bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die periodisch fortgesetzte Funktion!

b) Entwickeln Sie die Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten bis $k=3$!

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

4. (9 Punkte)

Skizzieren Sie den von den Paraboloiden $z = 2x^2 + 2y^2$ und $z = 27 - x^2 - y^2$ begrenzten Körper und berechnen Sie sein Volumen!

5. (9 Punkte)

Bei der Kurve $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2$ handelt es sich um eine Ellipse. Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Punkte dieser Ellipse, die den kleinsten bzw. größten Abstand vom Koordinatenursprung haben!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Extrema des Quadrats des Abstands vom Koordinatenursprung zu bestimmen!

Zusatz (+4 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art des Vektorfeldes $\vec{u}(x,y,z)$ aus Aufgabe 1 über dem Geradenstück vom Koordinatenursprung zum Punkt $(1, 1, 1)$! Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?