

Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: gedruckte Formelsammlung, Vorlesungsskripts der 3 Semester ohne Anhänge, Taschenrechner

1. (6 Punkte)

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'' - 8y' + 15y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -14$!

2. (4 Punkte)

Untersuchen Sie das Vektorfeld $\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz - 2xz \\ xz - z^2 \\ xy - x^2 - 2yz \end{pmatrix}$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit!

3. (8 Punkte)

Die obere (d.h. oberhalb der x - y -Ebene gelegene) Halbkugel (Körper) mit Radius 2 um den Koordinatenursprung sei mit Masse der Dichte $\rho(x, y, z) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ belegt. Ermitteln Sie ihre Masse!

4. (5 Punkte)

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 in einem Kraftfeld $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + y \\ 2 - x \end{pmatrix}$ längs des entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreises vom Punkt $(-1, 0)$ zum Punkt $(1, 0)$ zu bewegen!

5. (11 Punkte)

Die über dem Intervall $-4 < t \leq 4$ durch $f(t) = \cos \frac{\pi}{8} t$ definierte Funktion soll außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt werden.

a) Skizzieren Sie die durch periodische Fortsetzung entstehende Funktion!

b) Berechnen Sie die Fourierreihe!

Hinweis: $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$

c) Gegen welchen Werte konvergiert die Fourierreihe?

6. (6+4 Punkte)

Sei $f(x, y) = y^3 - 3x^2y + 24x + 8$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf stationäre Punkte und Extremwerte!

b) (**Zusatz**) In der Umgebung von $(x, y) = (0, -2)$ sei durch $f(x, y) = 0$ eine Funktion $y = \varphi(x)$ definiert. Ermitteln Sie durch implizite Differenziation einen Näherungswert für $\varphi(0.01)$!