

Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: gedruckte Formelsammlung, Vorlesungsskripts der 3 Semester ohne Anhänge, Taschenrechner

1. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{matrix} \dot{x} = x + 15y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{matrix}$!

2. (4 Punkte)

Sei $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$. Berechnen Sie $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$!

3. (6 Punkte)

Der obere (d.h. oberhalb der x -Achse gelegene) Halbkreis mit Radius 4 um den Koordinatenursprung sei mit Masse der Dichte $\rho(x, y) = 40 - x^2 - y^2 - 3y$ belegt. Ermitteln Sie seine Masse!

Bei den weiteren Aufgaben soll die Funktion $f(t) = 2 \sin \frac{\pi}{6} t$ auf verschiedene Weise approximiert bzw. interpoliert werden.

4. (6 Punkte)

Es seien nur die Funktionswerte von $f(t)$ an den Stellen $t = -3$, $t = -1$, $t = 1$ und $t = 3$ bekannt. Approximieren Sie die Funktion aus diesen Werten mit der Methode der kleinsten Quadrate mit einem quadratischen Ansatz $at^2 + bt + c$! Kommentieren Sie das Ergebnis! Welchen Wert hat das Approximationspolynom an der Stelle $t = 3$?

5. (4 Punkte)

Es seien nur die Funktionswerte von $f(t)$ an den Stellen $t = -3$, $t = -1$ und $t = 1$ bekannt. Bestimmen Sie mittels Newtoninterpolation daraus ein Interpolationspolynom! Welchen Wert hat dieses an der Stelle $t = 3$?

6. (10 Punkte)

Die Funktion $f(t)$ soll nur über dem Intervall $-3 < t \leq 3$ durch die obige Vorschrift gegeben und außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt und durch eine Fourierreihe approximiert werden.

- a) Skizzieren Sie die durch periodische Fortsetzung entstehende Funktion!
- b) Berechnen Sie die Fourierreihe!

Hinweis: $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$, $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

- c) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe für $t = 3$?

7. (4 Punkte)

Approximieren Sie $f(t)$ durch Taylorentwicklung an der Stelle $t_0 = 1$ durch eine Parabel. Welchen Wert hat diese an der Stelle $t = 3$?

bitte wenden!

Zusatz (+4 Punkte)

Lösen Sie die Randwertaufgabe $y''(x) + 14y'(x) + 53y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$!