

Mathematik III für Wirtschaftsingenieure

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: gedruckte Formelsammlung, Skript ohne Anhang, Taschenrechner

1. (6 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems $\dot{x} = 3x + y$
 $\dot{y} = 6x - 2y$!

2. (3 Punkte)

Berechnen Sie Divergenz und Rotation des Vektorfeldes $\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \\ \sin x \cdot \sin y \end{pmatrix}$!

3. (10+3 Punkte)

Das Produktionsergebnis P hänge von den Personalkosten x und den Sachkosten y nach der Formel $P(x, y) = 6x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ ab.

- Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen, welcher Wertebereich ergibt sich dafür?
- x und y werden in Geldeinheiten gemessen, es sollen insgesamt genau 100 Geldeinheiten verwendet werden. Wie sind diese auf x und y aufzuteilen, um ein maximales Produktionsergebnis zu erzielen?
- Für das konstante Produktionsniveau $P(x, y) = 48$ soll der Zusammenhang zwischen Personal- und Sachkosten durch die Funktion $y = \varphi(x)$ beschrieben werden. Bestimmen Sie $\varphi(1)$ und durch implizite Differenziation $\varphi'(1)$!
- (Zusatz:)** Bestimmen Sie aus $\varphi(1)$ und $\varphi'(1)$ einen Näherungswert für $\varphi(1.01)$ und vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert!

4. (10 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 0, & 1 < |x| \leq 4 \end{cases}$ werde periodisch fortgesetzt und mittels Fourierentwicklung durch trigonometrische Polynome $F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kCx + b_k \sin kCx)$ approximiert.

- Skizzieren Sie die periodisch fortgesetzte Funktion!
- Wie groß ist die Periodenlänge, wie muss die Konstante C gewählt werden?
- Berechnen Sie $F_2(x)$!
- Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge $\{F_n(x)\}$ für $-4 < x < 4$ bei $n \rightarrow \infty$?

5. (11 Punkte)

Betrachtet wird der von der Fläche $z = x^2 + y^2 - 16$ und der x - y -Ebene begrenzte Körper.

- Skizzieren Sie den Körper!
- Der Körper bestehe aus Material der Dichte $\rho(x, y, z) = \frac{1}{16 - x^2 - y^2}$. Berechnen Sie seine Masse!
- Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers!