

Mathematik III für Wirtschaftsinformatiker und -ingenieure

Prüfungsklausur

1. (17 Punkte)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 2y - z \\ \dot{y} &= 3x - 5y - 3z \\ \dot{z} &= 2x - 4y - z \end{aligned} !$

2. (17 Punkte)

Ermitteln Sie alle Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ über dem Ellipsoid $x^2 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1 !$

3. (13 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sin |x| & 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$ werde 2π -periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

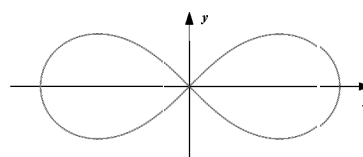
b) Approximieren Sie $f(x)$ mittels Fourierreiheentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom

2. Grades $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^2 a_k \cos kx + b_k \sin kx !$

Hinweis: $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$

4. (13 Punkte)

Durch die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ wird in kartesischen Koordinaten eine Lemniskate beschrieben. Sie umschließt eine Fläche, die sich aus zwei konvexen Teilflächen zusammensetzt.



a) In welchen Punkten schneidet die Lemniskate die x -Achse?

b) Zeigen Sie mittels Substitution durch Polarkoordinaten, dass die von der Lemniskate eingeschlossene Fläche durch

$$\{(r, \varphi) : -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}\} \cup \{(r, \varphi) : \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\varphi}\}$$

beschrieben wird!

Hinweis: $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Lemniskate eingeschlossenen Fläche!