Aufgabe		Punkte
1	**Aufgabe 1 mit Lösung**	7 erreichbar

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die $\dfrac{3|x-2|}{3x-2} < -2$ gilt!

Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{rl}
x<\frac{2}{3}: & 3(2-x) > -2(3x-2),\;\; 6-3x > -6x+4,\;\; 3x > -2,\;\; x > -\frac{2}{3} \\
x=\frac{2}{3}: & \text{nicht definiert} \\
\frac{2}{3}<x<2: & 3(2-x) < -2(3x-2),\;\; 6-3x < -6x+4,\;\; 3x < -2,\;\; x < -\frac{2}{3}: \text{ Widerspruch} \\
2\le x\quad : & 3(x-2) < -2(3x-2),\;\; 3x-6 < -6x+4,\;\; 9x < 10\,,\;\; x < \frac{10}{9}: \text{ Widerspruch}
\end{array}$$

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}\}$

Aufgabe		Punkte
2	**Aufgabe 2 mit Lösung**	12 erreichbar

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 17 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \lambda x_4 &= \mu \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = 10$, $\mu = 10$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

---

a) Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 17 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -9 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & -5 & -9 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 25 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{25}{4} & \frac{33}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = -1$

b) Mit λ und μ ergibt sich für die letzte Zeile in obigem Schema

$0\ \ 0\ \ 0\quad \lambda - 8 \mid \mu - 12$,

dies entspricht $(\lambda - 8)x_4 = \mu - 12$, ansonsten bliebt das Schema bei der Erzeugung der oberen Dreiecksmatrix unverändert. Also ist das Gleichungssystem für $\lambda \neq 8$ eindeutig lösbar, für $\lambda = 8,\ \mu = 12$ mehrdeutig lösbar (4. Zeile $= 2 \times 1$. Zeile) und für $\lambda = 8,\ \mu \neq 12$ unlösbar.

Aufgabe		Punkte
3	**Aufgabe 3 mit Lösung**	12 erreichbar

a) Zeigen Sie, daß die Geraden $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen!

b) Geben Sie die Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form an!

c) Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(\frac{9}{2}, -5, 8)$ auf diese Ebene sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene!

---

a) Da die Geraden nicht parallel sind, liegen sie genau dann in einer Ebene, wenn sie sich schneiden. Sie schneiden sich genau dann, wenn es Parameter s und t gibt, für die gilt:

$$\begin{array}{rcll} 2s &=& -4 & \Longrightarrow\ s = -2 \\ -1 + s &=& -1 + t & \Longrightarrow\ t = -2 \\ s &=& 10 + 6t & \text{ist für } s = t = -2 \text{ auch erfüllt} \end{array}$$

Also gibt es einen Schnittpunkt (nämlich $(-4, -3, -2)$), so daß die Geraden in einer Ebene liegen.

b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcll} x &=& 2s & \Longrightarrow\ s = \frac{x}{2} \\ y &=& -1 + s + t & \Longrightarrow\ t = y + 1 - s = y + 1 - \frac{x}{2} \\ z &=& s + 6t & \Longrightarrow\ z = \frac{x}{2} + 6y + 6 - 3x, \quad 2z = 12 - 5x + 12y \end{array}$$

Also lautet die Ebenengleichung in parameterfreier Form: $5x - 12y + 2z = 12$.

oder:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0, \text{ d.h. } 5x - 12y + 2z = 12$$

c) Die Gerade, auf der das Lot liegt, hat die Gleichung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sie schneidet die Ebene für t mit $5(\frac{9}{2} + 5t) - 12(-5 - 12t) + 2(8 + 2t) = 12$, d.h. $173t = -\frac{173}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$. Den Lotfußpunkt erhält man durch $\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$, d.h., es handelt sich um den Punkt $(2, 1, 7)$. Der Abstand des Punktes P vom Lotfußpunkt beträgt $\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{173} \approx 6.576$.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 mit Lösung

Punkte 12 erreichbar

Führen Sie für die Kurve $x^2 + xy + y^2 = 6$ die Hauptachsentransformation durch und stellen Sie die Kurve im transformierten und im Ausgangskoordinatensystem graphisch dar!

Die Eigenwerte ergeben sich aus $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0,$

d.h. $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}.$

$$\lambda_1 = \tfrac{3}{2}: \quad \begin{array}{rr|} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \text{ normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{2}: \quad \begin{array}{rr|} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \text{ normierter Eigenvektor } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Hauptachsentransformation erfolgt demzufolge durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x' \quad y')\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x' \quad y')\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x' \quad y')\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{3}{2}{x'}^2 + \frac{1}{2}{y'}^2 = 6.$$

Es handelt sich also um die Ellipse $\dfrac{{x'}^2}{2^2} + \dfrac{{y'}^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$ mit den Halbachsen 2 und $2\sqrt{3}$.

Aus $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ erhält man durch Addition bzw. durch Subtraktion $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, so daß die Koordinatenachsen des transformierten Systems wegen $y' = 0 \Leftrightarrow y = x$, $x' = 0 \Leftrightarrow y = -x$ aus denen des Ausgangssystems durch Drehung um 45° entstehen.

Zeichnung der Ellipse mit beiden Koordinatenkreuzen

Aufgabe		Punkte
5	**Aufgabe 5 mit Lösung**	12 erreichbar

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_2 + 2x_3 &\le 15 \\ -5x_2 + 3x_3 &\le 12 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

Durch die Einführung von Schlupfvariablen für die beiden Ungleichungen erhält man als Normalform:

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & \to & \max \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & & & = & 3 \\ & -x_2 & +2x_3 & +u_1 & & = & 15 \\ & -5x_2 & +3x_3 & & +u_2 & = & 12 \\ x_1, & x_2, & x_3, & u_1, & u_2 & \ge & 0 \end{array}$$

Simplexschema:

BV	c_B	x_1 3	x_2 3	x_3 -1	u_1 0	u_2 0	x_B	θ
x_1	3	1	2	-1	0	0	3	–
u_1	0	0	-1	2	1	0	15	$\frac{15}{2}$
u_2	0	0	-5	3	0	1	12	$\boxed{4}$
		0	3	$\boxed{-2}$	0	0	9	
x_1	3	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	7	21
u_1	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	7	$\boxed{3}$
x_3	-1	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	4	–
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	0	$\frac{2}{3}$	17	
x_1	3	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	6	
x_2	3	0	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	3	
x_3	-1	0	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	9	
		0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	18	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, handelt es sich um das Optimum:
$x_1^* = 6,\ x_2^* = 3,\ x_3^* = 9$, optimaler Zielfunktionswert: $z^* = 18$.

oder: Elimination von x_1 durch $x_1 = 3 - 2x_2 + x_3$ führt zu der graphisch lösbaren Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrrcr} -3x_2 & +2x_3 & +9 & \to & \max \\ -x_2 & +2x_3 & & \le & 15 \\ -5x_2 & +3x_3 & & \le & 12 \\ x_2, & x_3 & & \ge & 0 \end{array}$$

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die positive x_2–Achse, durch die Punkte $(0,0)$, $(0,4)$ und $(3,9)$ sowie von dem letzten Punkt aus durch die Gerade $-x_2+2x_3 = 15$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $-3x_2 + 2x_3 = 6$ führt auf die optimale Lösung $x_2^* = 3,\ x_3^* = 9 \implies x_1^* = 6,\ z^* = 18$.

oder: Elimination von x_3 durch $x_3 = x_1 + 2x_2 - 3$ führt zu der graphisch lösbaren Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & + x_2 & +3 & \to & \max \\ 2x_1 & +3x_2 & & \le & 21 \\ 3x_1 & + x_2 & & \le & 21 \\ x_1, & x_2 & & \ge & 0 \end{array} \qquad \text{(vgl. Aufgabe 6!)}$$

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die Punkte $(0,0)$, $(0,7)$, $(6,3)$ und $(7,0)$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $2x_1 + x_2 = 2$ führt auf die optimale Lösung $x_1^* = 6,\ x_2^* = 3 \implies x_3^* = 9,\ z^* = 18$.

Aufgabe		Punkte
6	**Aufgabe 6 mit Lösung**	5+5 erreichbar

In einem Betrieb werden aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 mit gleichem Aufwand Erzeugnisse E_1 und E_2 gefertigt, wobei pro Erzeugnis E_1 2 Geldeinheiten und pro Erzeugnis E_2 1 Geldeinheit Gewinn erwirtschaftet werden.

Für ein Erzeugnis E_1 werden 1 Einheit R_1, 2 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 benötigt, während pro Erzeugnis E_2 3 Einheiten R_1, 3 Einheiten R_2 und 1 Einheit R_3 benötigt werden.

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn 18 Einheiten R_1, 21 Einheiten R_2 und 21 Einheiten R_3 zur Verfügung stehen!

Zusatzaufgabe: Lösen Sie die Optimierungsaufgabe!

Sei x_1 : Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_1,
x_2 : Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse E_2.

Dann lautet das Modell:

Gewinn:	$2x_1 + x_2 \to \max$	
Rohstoff R_1 :	$x_1 + 3x_2 \leq$	18
Rohstoff R_2 :	$2x_1 + 3x_2 \leq$	21
Rohstoff R_3 :	$3x_1 + x_2 \leq$	21
Nichtnegativität:	$x_1, \quad x_2 \geq$	0

Zusatzaufgabe:

Durch die Einführung von Schlupfvariablen für die drei Ungleichungen erhält man als Normalform:

$$\begin{array}{rrrrrcr}
2x_1 & + x_2 & & & & \to & \max \\
x_1 & +3x_2 & +u_1 & & & = & 18 \\
2x_1 & +3x_2 & & +u_2 & & = & 21 \\
3x_1 & - x_2 & & & +u_3 & = & 21 \\
x_1, & x_2, & u_1, & u_2, & u_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Simplexschema:

BV	c_B	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	x_B	θ
		2	1	0	0	0		
u_1	0	1	3	1	0	0	18	18
u_2	0	2	3	0	1	0	21	$\frac{21}{2}$
u_3	0	3	1	0	0	1	21	$\boxed{7}$
		$\boxed{-2}$	-1	0	0	0	0	
u_1	0	0	$\frac{8}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	11	$\frac{33}{8}$
u_2	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	7	$\boxed{3}$
x_1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	7	21
		0	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	0	0	$\frac{2}{3}$	14	
u_1	0	0	0	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$	3	
x_2	1	0	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	3	
x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	6	
		0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	15	

Da alle Optimalitätsindikatoren nichtnegativ sind, handelt es sich um das Optimum:
$x_1^* = 6,\ x_2^* = 3$, optimaler Zielfunktionswert: $z^* = 15$.

oder: graphische Lösung:

Der zulässige Bereich ist begrenzt durch die Punkte $(0,0)$, $(0,6)$, $(3,5)$, $(6,3)$ und $(7,0)$. Die Parallelverschiebung der Niveaulinie (z.B.) $2x_1 + x_2 = 2$ führt auf die optimale Lösung $x_1^* = 6,\ x_2^* = 3 \implies z^* = 15$.