Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Lösung zur Klausurvorbereitung IV

Aufgabenkomplex 7 - Vektoren

1. (5 Punkte - WS 07/08) Gegeben sind die Vektoren $u = [1; -1; 2; 2]^\top, v = [2; 0; 4; 1]^\top$, $w = [1; 3; 2; -4]^\top \in \mathbb{R}^4$.

   a) Untersuchen Sie, ob die Vektoren u, v, w linear unabhängig sind.

   b) Welche Dimension hat der lineare Unterraum $U = span\{u, v, w\}$ aller Linearkombinationen von u, v, w?

   c) Wie groß ist die maximale Anzahl k von linear unabhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Lösung:

   a) u, v, w sind nicht linear unabhängig, es gilt $w = -3u + 2v$.

   b) Es gilt $\dim U = 2$.

   c) Im $\mathbb{R}^4$ gibt es maximal 4 linear unabhängige Vektoren, da die Dimension vom $\mathbb{R}^4$ 4 ist, bzw. da jeder Vektor des $\mathbb{R}^4$ als Linearkombination von $e_1 = [1, 0, 0, 0]^\top$, $e_2 = [0, 1, 0, 0]^\top$, $e_3 = [0, 0, 1, 0]^\top$ und $e_4 = [0, 0, 0, 1]^\top$ dargestellt werden kann.

2. (3 Punkte - SS 08) Gegeben sind die von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren

$$u = [1; \alpha; \alpha^2]^\top, \quad v = [\alpha; \alpha^2; -1]^\top \quad \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Für welche α sind die Vektoren u, v linear unabhängig?

   b) Für welche α sind die Vektoren u, v orthogonal (bezüglich des Standard-Skalarprodukts in $\mathbb{R}^3$)?

   Lösung:

   a) Für $\alpha \neq -1$ sind die Vektoren u, v linear unabhängig.

   b) Für $\alpha = 0$ sind die Vektoren u, v orthogonal.

3. (10 Punkte - SS 11) Im euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ sind die Vektoren

$$a = [-1, 2, 3]^\top, \quad b = [1, -2, 2]^\top$$

   gegeben.

   a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion c von a auf b.

   b) Ermitteln Sie einen Vektor d, sodass

$$b, a - c, d$$

   in der angegebenen Reihenfolge ein linksorientiertes orthogonales Vektorsystem bilden

   c) Unter welcher Bedingung an die reelle Zahl α liegt der Vektor $u = [3, \alpha, -1]^\top$ in dem Untervektorraum U, der von a und b aufgespannt wird?
   Stellen Sie für diesen Fall u als Linearkombination von a und b dar.

Lösung: a) $c = \frac{1}{9}[1, -2, 2]^\top$
b) $d = [10, 5, 0]^\top$
c) Für $\alpha = -6$ liegt u im Untervektorraum U, der von a und b aufgespannt wird.

Aufgabenkomplex 8 - Analytische Geometrie

1. (8 Punkte - WS 07/08) Ein schräges Dach ist Teil einer Ebene durch die Punkte $P(0; 0; 3)$, $Q(0; 6; 6)$, $R(-5; 6; 6)$. In $L(-4; -2; 12)$ befindet sich eine Punktlichtquelle.

   a) Bestimmen Sie den Punkt S des Daches, der von der Lampe am stärksten beleuchtet wird. (Je weiter ein Punkt von der Lichtquelle entfernt ist, umso schwächer wird er beleuchtet.)

   b) Der Punkt $E(-2.5; 1.5; 5.5)$ ist das obere Ende einer Stange von vernachlässigbarer Dicke, die mit dem anderen Ende auf der Dachfläche befestigt ist und parallel zur z-Achse ausgerichtet ist.
   Berechnen Sie den Schatten, den die Stange auf das Dach wirft.

   Lösung:

   a) $S(-4; 2; 4)$

   b) Der Schatten reicht von $A(-2.5; 1.5; 3.75)$ bis $B(-24/11; 74/33; 136/33)$.

2. (9 Punkte - WS 07/08) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(0; 4; 0), B(1; 1; 0)$ und $C(4; 5; 0)$ in der x-y-Ebene.

   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

   b) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, auf der die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AB}$ liegt. (Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite steht senkrecht auf dieser Seite und halbiert diese.)

   c) Die Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten schneiden sich im Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks. Berechnen Sie M für das Dreieck $\triangle ABC$.

   Lösung:

   a) Flächeninhalt $\triangle ABC$: $A = \frac{13}{2}$.

   b) $g: \quad x = [0.5, 2.5, 0]^\top + t[3, 1, 0]^\top, \quad t \in \mathbb{R}$

   c) Mittelpunkt $M(61/26; 81/26; 0)$.

3. (9 Punkte - SS 08) Gegeben sind die Punkte $P_1(2; -2; 3)$ und $P_2(12; -6; 7)$ und die Ebene $E : -x + y - z = 2$.

   a) Untersuchen Sie, ob die Strecke $\overline{P_1P_2}$ die Ebene E schneidet.

   b) Berechnen Sie den Lotfußpunkt P_1' des Punktes P_1 in E.

   c) Die Punkte P_1, P_2 und $P_3(1; -2; 4)$ definieren eine Ebene ϵ. Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebenengleichung von ϵ.

   d) Ermitteln Sie die Schnittmenge der Ebenen E und ϵ.

   Lösung:

   a) Die Strecke schneidet die Ebene nicht. (Die Gerade, die die Strecke $\overline{P_1P_2}$ enthält, schneidet hingegen die Ebene.)

   b) Lotfußpunkt $P_1'(-1; 1; 0$.

c) $\epsilon: \quad \dfrac{2x + 7y + 2z + 4}{\sqrt{57}} = 0.$

d) Schnitt ist Gerade $g: \quad u = [-2, 0, 0]^\top + t[-1, 0, 1]^\top, \quad t \in \mathbb{R}.$

4. (6 Punkte - SS 08) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(6; -2; -3), B(3; 0; 3)$ und $C(4; 2; 1)$.

   a) Bestimmen Sie die Geradengleichung der Höhe h, die zur Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ gehört.

   b) Bestimmen Sie die Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ des Dreiecks $\triangle ABC$.

   Lösung:

   a) $h: \quad x = [4, 2, 1]^\top + t[2, 15, -4]^\top, \quad t \in \mathbb{R}.$

   b) Richtung: $d = [-4, 5, 8]^\top$.

5. (9 Punkte - WS 08/09) Gegeben sind die Geraden

$$g_1: \quad x = [1, 0, 3]^\top + tr_1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_1 = [2, -1, -2]^\top$$

   und

$$g_2: \quad x = [-1, 1, 0]^\top + sr_2, \quad s \in \mathbb{R}, \quad r_2 = [4, 3, 1]^\top.$$

   a) Zeigen Sie, dass g_1 und g_2 windschiefe Geraden sind.

   b) Zu zwei windschiefen Geraden lassen sich parallele Ebenen E_1 und E_2 finden, sodass eine Gerade in E_1 liegt und die andere Gerade in E_2. Wie kann man den Normalenvektor der beiden Ebenen bestimmen?
   Wie lauten die (parameterfreien) Ebenengleichungen für E_1 und E_2 im Falle der gegebenen Geraden g_1 und g_2 ?

   c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g_1 und g_2.

   d) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von r_2 auf r_1.

   Lösung:

   a) Da g_1 und g_2 weder parallel sind noch sich schneiden, sind sie windschief. (Dies ist nachzurechnen.)

   b) Der Normalenvektor der beiden Ebenen kann durch $n = \frac{r_1 \times r_2}{||r_1 \times r_2||}$ bestimmt werden.
   Dabei sind $E_1: \quad x - 2y + 2z = 7, \qquad E_2: \quad x - 2y + 2z = -3.$

   c) Abstand: $d = \frac{10}{3}$.

   d) Orthogonale Projektion von r_2 auf r_1: $p = \frac{1}{3}[2, -1 - 2]^\top$.

6. (7 Punkte - WS 09/10) Schreiben Sie die parameterfreie Gleichung einer Ebene E auf, die von den Richtungen

$$r_1 = [2, 3, -1]^\top \quad \text{und} \quad r_2 = [4, 1, -3]^\top$$

   aufgespannt wird und die vom Ursprung $O(0; 0; 0)$ den Abstand $d = 3$ hat.
   Welcher Punkt P in E hat von O den Abstand $d = 3$?
   Ist die gesuchte Ebene eindeutig bestimmt? (Begründen Sie.)
   Lösung:
   Ebene E mit Abstand 3 zum Koordinatenursprung: $-4x + y - 5z + 3\sqrt{42} = 0$.
   Dieser Abstand wird vom Punkt P($12/\sqrt{42}$;-$3/\sqrt{42}$;$15/\sqrt{42}$) angenommen.
   Die Ebene E ist nicht eindeutig bestimmt, denn $E' : -4x + y - 5z - 3\sqrt{42} = 0$ hat auch Abstand 3 zum Koordinatenursprung.

7. (6 Punkte - WS 09/10) Ein Massepunkt bewegt sich für Zeiten $t \geq 0$ auf einer spiralförmigen Bahnkurve gemäß dem Gesetz $x(t) = 3\cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t$.
   Damit sind zur Zeit $t = \frac{\pi}{4}$ Geschwindigkeitsvektor v und Beschleunigungsvektor a wie folgt gegeben
   $$v = [-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1]^\top, \quad a = [-\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0]^\top.$$
   Schreiben Sie den Vektor a als Summe zweier orthogonaler Vektoren, von denen einer Tangentialrichtung hat.
   Berechnen Sie den Winkel zwischen a und seiner Tangentialkomponente.
   Lösung:
   Es gilt $a = a_t + a_n$, mit a_t tangential zu a und a_n orthogonal zu a.
   Dabei sind $a_t = [-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3}]^\top$ und $a_n = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{6}\sqrt{2}, -\frac{2}{3}]^\top$.
   Der Winkel ϕ zwischen a und a_t beträgt rund 43.0887°. Genauer gilt $\sin\phi = \sqrt{\frac{7}{15}}$.

8. (6 Punkte - SS 10) Gegeben sind die Geraden
   $$\begin{aligned} g: &\quad x = [2, 4, 10]^\top + t[-1, 3, 5]^\top, \quad t \in \mathbb{R} \\ h: &\quad x = [-2, 2, -5]^\top + s[4, 2, 1]^\top, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
   a) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind.
   b) Finden Sie eine Ebene E, die zu beiden Geraden den gleichen positiven Abstand hat.

   Lösung:
   a) Da g und h weder parallel sind noch sich schneiden, sind sie windschief.
   b) Die Ebene lautet $E: \quad -x + 3y - 2z = 4$.

9. (7 Punkte - SS 10) Die beiden Vektoren
   $$a = [4, 4, 2]^\top, \quad b = [4, 1, -1]^\top \quad \in \mathbb{R}^3$$
   spannen einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^3$ auf. Finden Sie eine Orthonormalbasis $B = \{u, v\}$ von U, wobei die Richtungen von u und a übereinstimmen sollen.
   Ergänzen Sie die Basis B durch Hinzunahme eines weiteren Vektors zu einer Orthonormalbasis $\tilde{B}$ in $\mathbb{R}^3$.
   Untersuchen Sie, ob $\tilde{B}$ rechtsorientiert oder linksorientiert ist.
   Lösung:
   ONB in U: $B = \{\frac{1}{3}[2, 2, 1]^\top, \frac{1}{3}[2, -1, -2]^\top\}$.
   ONB in $\mathbb{R}^3$: $\tilde{B} = \{\frac{1}{3}[2, 2, 1]^\top, \frac{1}{3}[2, -1, -2]^\top, \frac{1}{3}[-1, 2, -2]^\top\}$.
   Dabei ist $\tilde{B}$ rechtsorientiert.

10. (7 Punkte - SS 11) Im Punkt $A(3; 4; 4)$ des dreidimensionalen Raums befindet sich eine punktförmige Lichtquelle, die die Ebene $E: -2x + y - z = -8$ beleuchtet.
    a) Bestimmen Sie in E den Schattenpunkt S des Punktes $P(2; -1; 2)$.
    b) Unter welchem Winkel fällt das Licht im Punkt S ein?
    c) In welchem Punkt F der Ebene fällt das Licht unter einem Winkel von 90° ein?

    Lösung: a) Der Schattenpunkt liegt bei $S(1; -6; 0)$.
    b) Einfallswinkel $\alpha = 4,275°$
    c) Lot $F = \frac{1}{3}[11, 11, 13]^\top$