Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Hofmann
Fakultät für Mathematik Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Lösung zur Klausurvorbereitung III

Aufgabenkomplex 5 - Hauptachsentransformation

1. (9 Punkte - WS 07/08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 + 4x_2 - 6 = 0.$$

Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $u_1^2 + 2u_2^2 - 8 = 0 \Rightarrow$ Ellipse.

2. (9 Punkte - SS 08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 + 16x_1x_2 - 11x_2^2 + 34x_1 - 28x_2 + 4 = 0.$$

Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $-3u_1^2 + u_2^2 + 3 = 0 \Rightarrow$ Hyperbel.

3. (8 Punkte - WS 08/09) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 10x_1 - 70x_2 = 200.$$

Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $\sqrt{10}u_1 + u_2^2 - 30 = 0 \Rightarrow$ Parabel.

4. (8 Punkte - WS 09/10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - x_2 = 2.$$

Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $-u_1^2 + 3u_2^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow$ Hyperbel.

5. (8 Punkte - SS 10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 - 16x_1x_2 - 11x_2^2 - 16x_1 - 22x_2 + 4 = 0.$$

Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $-3u_1^2 + u_2^2 + 3 = 0 \Rightarrow$ Hyperbel

6. (8 Punkte - SS 11) Bestimmen Die die Normalform der quadratischen Gleichung

$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 - 12 = 0.$$

Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $u_1^2 + 2u_2^2 - 8 = 0 \Rightarrow$ Ellipse.

Aufgabenkomplex 6 - Gemischte Analysisaufgaben

1. (5 Punkte - WS 08/09) Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} x^k$.

   a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe und geben Sie den Konvergenzbereich an.

b) Berechnen Sie unter Nutzung einer geeigneten geometrischen Reihe den Wert der Potenzreihe (innerhalb des Konvergenzbereichs).

Lösung:

a) Konvergenzradius: $r = 2$, Konvergenzbereich: $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$.

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} x^k = \frac{x^2}{16 - 8x}$, für $-2 < x < 2$.

2. (8 Punkte - WS 08/09) Durch

$$y = \ln x, \quad x > 0$$

ist eine ebene Kurve K gegeben.

a) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ von K.

b) Bestimmen Sie im Punkt $P_0(1; 0)$ der Kurve den Krümmungsradius sowie die Gleichungen von Tangente und Normale.

c) Für welches x ist der Krümmungsradius minimal?

Lösung:

a) $\kappa(x) = \dfrac{-x^{-2}}{(1 - (x^{-1})^2)^{\frac{3}{2}}}$.

b) Krümmungsradius: $r = \sqrt{8}$, Tangentengleichung: $y_T = x - 1$, Normalengleichung: $y_N = 1 - x$.

c) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. (4 Punkte - WS 08/09) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3}, & x \geq 0, \\ -|x|^{1/3}, & x < 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ differenzierbar ist.
Lösung: Die Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn der Differenzenquotient für $x \to x_0 = 0$ existiert. Es gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}} = \infty,$$

also existiert der Grenzwert nicht und somit ist f an $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

4. (3 Punkte - WS 09/10) Finden Sie das Taylor-Polynom dritten Grades für $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = \pi$.
Lösung: $T_3(x) = -(x - \pi) + \frac{1}{6}(x - \pi)^3$.

5. (6 Punkte - WS 09/10) Ein Punkt bewegt sich für $t \geq 0$ nach folgendem Zeitgesetz in der $x - y -$ Ebene:

$$x(t) = t \cos t, \quad y(t) = t \sin t.$$

a) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Punktes zu einer beliebigen Zeit $t > 0$.

b) Bestimmen Sie im Punkt $P_0(0; \pi/2)$ der Bahnkurve die Gleichungen von Tangente und Normale.

Lösung:

a) Betrag der Geschwindigkeit: $|v(t)| = \sqrt{1 + t^2}$.

b) Gleichung von Tangente: $y_T = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$, Gleichung von Normale: $y_N = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$.

6. (4 Punkte - WS 09/10) Gibt es eine reelle Konstante r, sodass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cosh x - 1}{5x^2}, & x \neq 0, \\ r, & x = 0, \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist?
Lösung: Klar ist, dass f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Wegen L'Hospital gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 1}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}}{10x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}}{10} = \frac{1}{10},$$

und somit ist f für $r = \frac{1}{10}$ stetig auf $\mathbb{R}$.

7. (8 Punkte - SS 10) Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

ist eine Ellipse K in der $x - y -$ Ebene gegeben.

a) Geben Sie eine parametrische Darstellung $(x(t), y(t)), t \in I$ der Kurve K an.

b) Bestimmen Sie im Punkt $P(-2; y_0)$ der Kurve ($y_0 > 0$) die Gleichungen von Tangente und Normale.

Lösung:

a) $(x(t), y(t))^\top = (4\cos t, 2\sin t)^\top, \quad t \in I = [0, 2\pi)$.

b) Tangentengleichung: $y_T = \frac{1}{6}\sqrt{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{3}$, Normalengleichung: $y_N = -2\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$.

8. (8 Punkte - SS 10) Begründen Sie, warum die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0, \\ 1 + cx, & x > 0, \end{cases}$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.
Untersuchen Sie den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bei $x = 0$ auf Konvergenz für $\Delta x \to 0$.
Für welches c ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$?
Lösung: Klar ist, dass f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Für $x = 0$ gilt $(x+1)^2 = 1 = 1 + cx$, und somit ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$.
Klar ist wieder, dass f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Für $x = 0$ untersuche linksseitigen und rechtsseitigen Differenzenquotienten:
$\lim_{h \searrow 0} f'(0+h) = c, \quad \lim_{h \searrow 0} f'(0-h) = 2,$
also ist f stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ genau dann wenn $c = 2$ ist.

9. (9 Punkte - WS 10/11) Gegeben ist die Zykloide $\mathcal{K}$ mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei a eine positive Konstante ist.

a) Bestimmen Sie die Krümmung und den Mittelpunkt des Krümmungskreises für jenen Kurvenpunkt P, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft und den $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt.

b) Finden Sie alle Punkte von $\mathcal{K}$, die nicht regulär sind.

Lösung: a) Die Krümmung ist durch

$$\kappa(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(a\sqrt{8(1-\cos t)}}$$

gegeben. Im Punkt P muss gelten, dass $\dot{y}(t) = 0$, also $a \sin t = 0$, d.h. $t = \pi$ und somit $P(a(\pi - \sin\pi); a(1-\cos\pi)) = P(a\pi; 2a)$.
In P erhalten wir die Krümmung $-\frac{1}{4a}$, also einen Krümmungsradius von $\delta = 4a$.
Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt bei $M(a\pi; -2a)$.
b) Alle Punkte, wo K nicht regulär ist, erfüllen $\dot{x}(t) = 0$, d.h. $1 = \cos t$, also $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ und damit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

10. (5 + 2 Punkte - WS 10/11) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k$$

konvergiert bzw. divergiert.
Zusatzaufgabe: Gegen welche Funktion konvergiert die Potenzreihe?
Lösung: Das Quotientenkriterium liefert, dass für $|x| < \frac{3}{2}$ die Reihe absolut konvergiert, und zwar gegen $\frac{1}{3+2x}$. Für $|x| > \frac{3}{2}$ divergiert die Reihe.
Für $x = \frac{3}{2}$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k = \infty$.
Für $x = -\frac{3}{2}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k$ alternierend, also konvergiert die Reihe nicht.

11. (5 Punkte - WS 10/11) Wie lautet für die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ das Taylor-Polynom zweiten Grades von

$$f(x) = x^x, \quad x > 0 \quad ?$$

Lösung: Es gilt

$$T_2(x) = 1 + 1(x-1) + \frac{1}{2} 2(x-1)^2 = x^2 - x + 1.$$

12. (4 Punkte - SS 11) Für welche reelle Zahlen α, β, γ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma, & x \leq 1 \\ -\ln x, & x > 1 \end{cases}$$

zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$?
Lösung: Klar ist, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ unendlich oft differenzierbar ist. Es ist im Punkt $x_0 = 1$ zweimal stetig differenzierbar genau dann, wenn $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -2, \gamma = \frac{3}{2}$.

13. (9 Punkte - SS 11) Bestimmen Sie Tangentengleichung und Krümmung im Punkt $P(1;0)$ der logarithmischen Spirale K mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = e^{bt} \cos t, \quad y(t) = e^{bt} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $b \neq 0$ eine reelle Konstante.
Lösung: Die Krümmung im Punkt $P(1;0)$ lautet

$$\kappa(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Der Normalenvektor v_N im Punkt $P(1;0)$ ist gegeben durch $v_N = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$.
Da gilt

$$v_N^\top x = v_N^\top x_0$$

folgt

$$-x + by_T = -1\dot{1} + b\dot{0}$$

und somit $y_T = \frac{1}{b}x - \frac{1}{b}$ als Gleichung für die Tangente.

14. (5 Punkte - SS 11) Wie lautet für die Funktion

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3$$

und die Entwicklungsstelle $x_0 = -1$ das Taylor-Polynom dritten Grades T_3 in Potenzen von $(x - x_0)$?
Welche Gestalt hat das Restglied R der Taylor-Entwicklung?
Lösung: Es gilt

$$f(x) = T_3(x) + R_3(x),$$

wobei mit $R_3(x)$ das Restglied des Taylor-Polynoms dritten Grades bezeichnet wird. Wir erhalten als Taylorpolynom

$$T_3(x) = -3 + (x+1) + \frac{1}{2}(-4)(x+1)^2 + \frac{1}{6}6(x+1)^3$$

und das Restglied ist null, da das Taylorpolynom dritten Grades stets Polynome dritten Grades genau approximiert und mit diesem identisch ist.