

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Lösung zur Klausurvorbereitung II

Aufgabenkomplex 1 - Komplexe Zahlen (Zusatzaufgaben)

Die folgenden Aufgaben waren nicht Bestandteil einer Prüfung Höhere Mathematik I für Maschinenbauer.

1. Man bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^3 = -1$, b) $z^4 + 1 = 0$, c) $z^3 + 2 = 2i$, d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$,

e) $z^2 = -3 - 4i$, f) $z^4 - 2iz^2 + 2i = 1$, g) $z^2 + 4iz + 5 = 0$.

Lösung:

a) $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$, b) $z_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$, d) $z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{3\pi}{6})}$, $k = 0, 1, 2, 3$,

e) $z_{1,2} = \pm(1 - 2i)$, f) $z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{w_j - i}$, $w_{1,2} = \pm(i - 1)$,

g) $z_1 = i$, $z_2 = -5i$.

2. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

a) $z^5 = 1$, b) $z^3 - i = 0$, c) $z^6 = 64$, d) $\bar{z}^3 = -8$,

e) $z^2i - 2z - i + 1 = 0$, f) $(z - 3i)^3 + 64 = 0$, g) $\bar{z} = z^3$, h) $z^2 + 4iz = 5$.

Lösung:

a) $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, b) $z_1 = -i$, $z_{2,3} = \frac{1}{2}i \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

c) $z_k = 2e^{ik\frac{\pi}{3}}$, $k = 0, \dots, 5$, d) $z_k = 2e^{i(k\frac{2\pi}{3} + \pi)}$, $k = 0, 1, 2$,

e) $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$, $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$,

f) $z_k = 2e^{i(k\frac{\pi}{3} + \pi)}$, $k = 0, \dots, 5$, g) $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$, $z_5 = 0$,

h) $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = 1 - 2i$.

Aufgabenkomplex 4 - Matrizen, Determinanten, Eigenwerte

1. (5 Punkte - WS 07/08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & \beta & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β .

Ist F invertierbar?

Ist die transponierte Matrix F^\top invertierbar?

Lösung: $\det F_\beta = -42 - 20\beta - 2\beta^2$

F ist invertierbar $\Leftrightarrow \det F_\beta \neq 0 \Leftrightarrow \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -3\} \Leftrightarrow F^\top$ ist invertierbar.

2. (8 Punkte - WS 07/08) Die Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

hat nur ganzzahlige Eigenwerte.

Bestimmen Sie diese und die zugehörigen Eigenunterräume.

Geben Sie für jeden Eigenunterraum eine Orthonormalbasis an.

Lösung: Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = 6$.

$$E_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{ONB für } E_0: \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{ONB für } E_6: \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. (9 Punkte - SS 08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \beta & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β .

Ermitteln Sie den Rang von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β .

Lösung: $\det F_\beta = -8\beta^2 + 56\beta - 48$.

Für $\det F_\beta \neq 0$ gilt $\text{rang } F_\beta = 4$, d.h. $\text{rang } F_\beta = 4$, falls $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$.

Für $\beta \in \{1, 6\}$ gilt $\text{rang } F_1 = 3$, $\text{rang } F_6 = 3$.

4. (9 Punkte - SS 08)

a) Die symmetrische Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hat nur ganzzahlige Eigenwerte.

Bestimmen Sie diese und die zugehörigen normierten Eigenvektoren.

b) Nennen Sie zwei Eigenschaften von Eigenvektoren symmetrischer Matrizen. Überprüfen Sie diese Eigenschaften am Beispiel der Matrix G .

Lösung: a) Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$.

Zugehörige Eigenvektoren: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Eigenschaften von Eigenvektoren symmetrischer Matrizen:

- da alle EW reell sind, kann man stets die zugehörigen EV reell wählen,
- alle EV zu verschiedenen EW sind orthogonal.

5. (10 Punkte - WS 08/09)

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.

b) Begründen Sie kurz folgenden Sachverhalt:

Wenn $\lambda = 0$ Eigenwert einer Matrix B ist, dann ist B nicht invertierbar.

Lösung: a) Charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) = \lambda^2(8 - \lambda)$,

Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = 0, \lambda_3 = 8$,

Basis in E_0 : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Basis in E_8 : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) 0 ist EW von $B \Leftrightarrow \det(B - 0I) = 0 \Leftrightarrow \det B = 0 \Leftrightarrow B$ ist nicht invertierbar.

6. (9 Punkte - WS 09/10)

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \neq 0$ und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.

Wie lauten Eigenwerte und Eigenunterräume für $a = 0$?

- b) Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenwertgleichung, dass folgende Behauptung wahr ist:
 Wenn eine Matrix B den Eigenwert μ hat mit zugehörigem Eigenvektor y , dann ist μ^2 Eigenwert der Matrix B^2 mit dem zugehörigen Eigenvektor y .

Lösung: a) Charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) = \lambda^2(a - \lambda)$,

Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = 0, \lambda_3 = a$,

Für $a \neq 0$ gilt:

Basis in E_0 : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Basis in E_a : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Für $a = 0$ folgt, dass $\lambda = 0$ einziger Eigenwert ist, und $E_0 = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$.

b) Zu zeigen: μ ist EW von B zum EV $y \Leftrightarrow \mu^2$ ist EW von B^2 zum EV y

Beweis: Sei μ EW von B zum EV $y \Leftrightarrow Bx = \mu x \Leftrightarrow B(Bx) = B(\mu x) \Leftrightarrow$

$B^2x = \mu(Bx) \Leftrightarrow B^2x = \mu(\mu x) \Leftrightarrow B^2x = \mu^2x \Leftrightarrow \mu^2$ ist EW von B^2 zum EV y . \square

7. (8 Punkte - SS 10)

Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert dessen algebraische und geometrische Vielfachheit sowie den zugehörigen Eigenunterraum.

Lösung: Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = -3$,

Algebraische Vielfachheit: $\alpha(0) = 1, \alpha(-3) = 2$,

$E_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}, E_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : s, t \in \mathbb{R} \right\}$,

Geometrische Vielfachheit: $\gamma(0) = 1 = \dim E_0, \gamma(-3) = 2 = \dim E_{-3}$.

8. (8 Punkte - SS 11)

Ermitteln Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenunterräume der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

Lösung: Charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) = \lambda^2(2 - \lambda)$,

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha(0) = 2$

$\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha(2) = 1$

Eigenunterräume: $E_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}, E_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R} \right\}$,

Insbesondere gilt für die geometrischen Vielfachheiten: $\gamma(0) = 1, \gamma(2) = 1$.

A ist nicht diagonalisierbar, weil für $\lambda_1 = 0$ gilt $\alpha(0) = 2 \neq 1 = \gamma(0)$, d.h. die Vielfachheiten stimmen nicht für alle Eigenwerte überein.