

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Lösung zur Klausurvorbereitung I

Aufgabenkomplex 1 - Komplexe Zahlen

1. (5 Punkte - WS 07/08) Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung

$$z^3 - a(1 + \sqrt{3}i)^2 = 0.$$

Lösung: $z_k = \sqrt[3]{4a}e^{i(\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$

2. (5 Punkte - SS 08) Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von allen komplexen Lösungen z der Gleichung

$$z^3 = (1 + i)^6.$$

Lösung: $z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2,$

$\operatorname{Re} z_0 = 0, \operatorname{Im} z_0 = 2, \quad \operatorname{Re} z_1 = -\sqrt{3}, \operatorname{Im} z_1 = -1, \quad \operatorname{Re} z_2 = \sqrt{3}, \operatorname{Im} z_2 = -1.$

3. (6 Punkte - WS 08/09) Lösen Sie mittels quadratischer Ergänzung folgende quadratische Gleichung in \mathbb{C} :

$$z^2 + (3 - i)z + 2 - 2i = 0.$$

Lösung: $z_1 = -2, \quad z_2 = i - 1.$

4. (6 Punkte - WS 09/10) Finden Sie jene Lösung w der Gleichung

$$z^2 - 4z = 2i - 4,$$

deren Imaginärteil negativ ist.

Geben Sie Real- und Imaginärteil von w^{2010} an.

Lösung: $z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 1 - i \Rightarrow w = 1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}),$

$w^{2010} = (\sqrt{2})^{2010}(\cos(2010\frac{7\pi}{8}) + i \sin(2010\frac{7\pi}{8})) \Rightarrow \operatorname{Re} w^{2010} = 0, \operatorname{Im} w^{2010} = -2^{1005}.$

5. (4 Punkte - SS 10) Finden Sie den Real- und Imaginärteil von

$$w = \frac{z - 1}{z + i}$$

für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: $\operatorname{Re} w = \frac{(x-1)x + y(1+y)}{x^2 + (1+y)^2}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{1+y-x}{x^2 + (1+y)^2}.$

6. (4 Punkte - SS 11) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \frac{1+2i}{2-i} - \frac{\alpha-2i}{i+1}$$

in Abhängigkeit von der reellen Zahl α .

Für welches α ist z reell?

Lösung: $\operatorname{Re} z = \frac{2-\alpha}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{4+\alpha}{2} \Rightarrow (z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = -4)$

Aufgabenkomplex 2 - Ungleichungen

1. (4 Punkte - WS 07/08) Für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 5$ gilt die folgende Ungleichung?

$$\frac{x^2 + 6}{|5 - x|} > 2$$

Lösung: $\mathcal{L} = (-\infty, -1 - \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5} - 1, \infty)$.

2. (5 Punkte - SS 08) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$\left| \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right| > |x - 2|$$

Lösung: $\mathcal{L} = (-\infty, -\frac{11}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

3. (5 Punkte - WS 08/09) Es sei $a > 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$|x + a| - |x - a| < x$$

Lösung: $\mathcal{L} = (-2a, 0) \cup (2a, \infty)$.

4. (5 Punkte - WS 09/10) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$3|x - 2| - 4|x| \leq 5$$

Lösung: $\mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus (-1, \frac{1}{7})$.

5. (5 Punkte - SS 10) Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ gilt die Ungleichung

$$\frac{4|x| - 5}{|x - 1|} \leq 2 \quad ?$$

Lösung: $\mathcal{L} = [-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}] \setminus \{1\}$.

6. (5 Punkte - SS 11) Für welche reellen Zahlen x gilt die Ungleichung

$$x \cdot |x| > x \quad ?$$

Lösung: $\mathcal{L} = (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Aufgabenkomplex 3 - Lineare Gleichungssysteme

1. (7 Punkte - WS 07/08) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 6 &= 0, & -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 + \alpha &= 0, & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Lösung: Für $\alpha \neq -10$ ist das System unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{\alpha \neq -10} = \emptyset$.

Für $\alpha = -10$ folgt

$$\mathcal{L}_{\alpha = -10} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} -s + t \\ 2 + 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : s, t \in \mathbb{R} \right) \right\}.$$

2. (5 Punkte - SS 08) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1, & 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 6 - 26s + 17t \\ -1 + 7s - 5t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : s, t \in \mathbb{R} \right) \right\}.$$

3. (5 Punkte - WS 08/09) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3)$ eines reellen Polynoms

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

aus folgenden vier Bedingungen, die zu einem linearen Gleichungssystem führen:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = -1, \quad f(2) = 0, \quad f'(2) = 1.$$

Wieviele solcher Polynome gibt es?

Lösung: Da das lineare Gleichungssystem, welches durch obige Bedingungen bestimmt ist, vollen Rang hat, ist es eindeutig lösbar.

Somit existiert genau eine Lösung: $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

4. (6 Punkte - WS 09/10) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $c \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3, & x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 6, & 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= c. \end{aligned}$$

Lösung: Für $c \neq -4$ ist das System unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{c \neq -4} = \emptyset$.

Für $c = -4$ folgt

$$\mathcal{L}_{c=-4} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 15 - 11s \\ 1 + s \\ -5 + 5s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : s \in \mathbb{R} \right) \right\}.$$

5. (6 Punkte - SS 10) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $b \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 + 2x_2 + bx_3 &= 4. \end{aligned}$$

Lösung: Für $b = 0$ ist das System unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{b=0} = \emptyset$.

Für $b \neq 0$ folgt

$$\mathcal{L}_b = \left\{ \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{b}\right) \\ \frac{1}{3} \left(4 + \frac{2}{b}\right) \\ \frac{2}{b} \end{pmatrix} \right) \right\}.$$