Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann, Prof. Dr. Horst Martini
Fakultät für Mathematik Anna Trauth, Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Lösung zum 4. Übungsblatt

Vektoren und Matrizen

1. a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Linearkombinationen der Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

   Lösung:

   $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von a, b, da $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist keine Linearkombination von a, b, da keine Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) Bilden Sie aus den genannten Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$. Wie lauten die Koordinaten der Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ in dieser Basis?

   Lösung:

   Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ und a, b, c mit $c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein System von linear unabhängigen Vektoren bildet, ist $B = \{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Dabei gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B.$$

2. Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie $A^\top B, BA, x^\top A^\top B, BAy, x^\top y$.

   Lösung:

$$A^\top B = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 10 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

$$x^\top A^\top B = \begin{pmatrix} 16 & 40 \end{pmatrix}, \quad BAy = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad x^\top y = 0.$$

3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beliebig. Welche Auswirkung hat eine Multiplikation von A mit B_i von rechts bzw. links:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

	Linksmultiplikation
B_1	Zeile 2 wird mit -2 multipliziert
B_2	Zur Zeile 1 wird 3 mal die Zeile 2 addiert
B_3	Die 1. Zeile wird mit der 3. Zeile getauscht
B_4	Die Matrix wird eine Zeile nach oben verschoben

	Rechtsmultiplikation
B_1	Spalte 2 wird mit -2 multipliziert
B_2	Zur Spalte 2 wird 3 mal die Spalte 1 addiert
B_3	Die 1. Spalte wird mit der 3. Spalte getauscht
B_4	Die Matrix wird eine Spalte nach rechts verschoben

4. Zwei Produkte P_1, P_2 werden aus drei Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3, die wiederum aus den Ausgangsstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 hergestellt werden, gefertigt.

A	je P_1	je P_2
Z_1	3	4
Z_2	4	2
Z_3	1	3

B	je Z_1	je Z_2	je Z_3
R_1	2	1	2
R_2	3	3	0
R_3	5	3	2
R_4	0	1	2

a) Berechnen Sie die Aufwandsmatrix für den Bedarf an Rohstoffen je Produkt.
Lösung:

$$C := BA = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 21 & 18 \\ 29 & 32 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

b) Ein Kunde bietet uns folgenden Auftrag an:
Herstellung und Lieferung von 100 P_1 und 50 P_2 zum Gesamtpreis von 71.300 €. Zu den dabei auftretenden Kosten liegen uns folgende Daten vor:

Rohstoffkosten	€
je R_1	2
je R_2	1
je R_3	5
je R_4	3

Fertigungskosten 1	€
je Z_1	20
je Z_2	15
je Z_3	30

Fertigungskosten 2	€
je P_1	10
je P_2	15

Zusätzlich treten noch Fixkosten (inkl. Lieferkosten) in Höhe von 2.750 € auf. Lohnt sich die Annahme des Auftrags, wenn wir eine Gewinnerwartung von 10 % haben?

Lösung:

Sei $p = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$, $k_{\text{Rohstoff}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k_{\text{Zwischenfertigung}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$,
$k_{\text{Endfertigung}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.
$K_{\text{Rohstoff}} = (Cp)^\top k_{\text{Rohstoff}} = 32.500$,
$K_{\text{Zwischenfertigung}} = (Ap)^\top k_{\text{Zwischenfertigung}} = 25.000$,
$K_{\text{Endfertigung}} = p^\top k_{\text{Endfertigung}} = 1.750$,
$K_{\text{Fix}} = 2.750$.

$\Rightarrow K_{\text{Gesamt}} = 62.000$.

Da $62.000(1 + 0.1) = 68.200 < 71.300$, sollten wir den Auftrag annehmen.