Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann, Prof. Dr. Horst Martini
Fakultät für Mathematik Anna Trauth, Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Lösung zum 3. Übungsblatt

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass keine negativen Exponenten mehr auftreten:

$$\text{a) } \left(\frac{s^{-4}x^2}{t^{-6}y^{-4}}\right)^2 : \left(\frac{x^{-1}y^{-2}}{t^4 s^{-3}}\right)^3 = \frac{x^7 t^{24} y^{14}}{s^{17}},$$
$$\text{b) } \left[\left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^{-2}\right]^{-3} = 5^{18},$$
$$\text{c) } \left[\left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^{-3}}\right)^4\right]^{-2} = \frac{x^{24}y^{16}}{z^{24}}.$$

2. Vereinfachen Sie:

$$\text{a) } \frac{x+y}{z}\sqrt[3]{\frac{z^4 - z^3 x}{x^2+2xy+y^2}} = \sqrt[3]{(x+y)(z-x)}, \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a^4-b^4}} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a-b}},$$
$$\text{c) } \frac{\sqrt[3]{a^4 b} \cdot \sqrt[3]{a^2 b^7} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}}{\sqrt[3]{a^2 b^5}} = a^2 \sqrt[3]{b^4}, \qquad \text{d) } \sqrt[3]{a^2\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}} = a^{\frac{23}{24}},$$
$$\text{e) } \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{x^2}} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{5}{6}}, \qquad \text{f) } \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}} = \sqrt[8]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}.$$

3. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass der Nenner rational wird.

$$\text{a) } \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{15}+1}{22}, \qquad \text{b) } \frac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{\sqrt{12}+5\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{10}-9\sqrt{15}}{19},$$

4. Formen Sie die Logarithmenausdrücke um bzw. bestimmen Sie x.

$$\text{a) } \log_k \sqrt[m]{k} = \frac{1}{m}, \qquad \text{b) } \log_y y^{-n} = -n, \qquad \text{c) } \ln e^{-3} = -3,$$
$$\text{d) } \log_x \frac{1}{u} = -1 \Rightarrow x = u, \qquad \text{e) } \log_4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

5. Fassen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze zusammen.

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \log_a u + \log_a v - \log_a w && = \log_a\left(\frac{uv}{w}\right),\\
&\text{b) } x\ln u + y\ln v && = \ln(u^x v^y),\\
&\text{c) } \frac{1}{3}\log_k a - \frac{1}{5}\log_k b + \frac{2}{3}\log_k c && = \log_k\left(\frac{\sqrt[3]{ac^2}}{\sqrt[5]{b}}\right).
\end{aligned}$$

Wurzel-, Exponential- und Logarithmengleichungen

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \sqrt{5x-4} = 1+\sqrt{3x+1} && \Rightarrow x\in\{8\},\\
&\text{b) } \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} && \Rightarrow x\in\left\{\sqrt{5}\right\},\\
&\text{c) } \sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3} = 0 && \Rightarrow x\in\left\{-3+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\},\\
&\text{d) } 4\sqrt[3]{6x-1}+5 = 0 && \Rightarrow x\in\left\{-\frac{61}{384}\right\},\\
&\text{e) } e^{x^2-2\sqrt{x^2}} - e^{-1} = 0 && \Rightarrow x\in\{-1,1\},\\
&\text{f) } 10^{2x} - 101\cdot 10^x + 100 = 0 && \Rightarrow x\in\{0,2\},\\
&\text{g) } \ln(x^2+10x-4) - \ln x - 1 = 0 && \Rightarrow x\in\left\{-5+\frac{e}{2}+\sqrt{29-5e+\frac{e^2}{4}}\right\},\\
&\text{h) } \frac{\ln(35-x^3)}{\ln(5-x)} = 3 && \Rightarrow x\in\{2,3\}.
\end{aligned}$$

2. Lösen Sie die folgende Formel nach t auf:

$$\text{a) } Kq^t - \frac{q^t-1}{q-1} = 0 \Rightarrow t = -\log_q\left(1+K(1-q)\right),$$

dabei Lösbarkeit für konkrete Parameterwahl beachten.

3. Lösen Sie die Gleichungen:

$$\text{a) } x^4-5x^2+4=0 \Rightarrow x\in\{-2,-1,1,2\}, \quad \text{b) } 10x^4-x^2-21=0 \Rightarrow x\in\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}.$$