Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann, Prof. Dr. Horst Martini
Fakultät für Mathematik Anna Trauth, Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Lösung zum 2. Übungsblatt

Das Rechnen mit Ungleichungen

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\text{a) } -3x + 2 < 4x - 9, \qquad x \in \left(\frac{11}{7}, \infty\right),$$

$$\text{b) } (a - x)b < cx, \qquad x \begin{cases} > \dfrac{ab}{c+b}, & \text{für } c + b > 0, \\ < \dfrac{ab}{c+b}, & \text{für } c + b < 0, \\ \in \emptyset, & \text{für } c + b = 0, ab \geq 0, \\ \in \mathbb{R}, & \text{für } c + b = 0, ab < 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } \frac{3x - 1}{2x + 2} > 1 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 3],$$

$$\text{d) } \frac{x - 1}{x + 2} \leq 4 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus (-3, -2].$$

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $(x - a)(x - b)(x - c)^{-1} > 0$ falls $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a > b > c$?

   $x \in (a, \infty) \cup (c, b)$

3. Lösen Sie die Ungleichungen $x^2 < m$ und $x^2 > m$ mit $m \in \mathbb{R}$.

$$x^2 < m \iff \begin{array}{rl} |x| < \sqrt{m} & \text{für } m > 0, \\ x \in \emptyset & \text{für } m \leq 0, \end{array} \iff \begin{array}{rl} x \in \left(-\sqrt{m}, \sqrt{m}\right) & \text{für } m > 0, \\ x \in \emptyset & \text{für } m \leq 0. \end{array}$$

$$x^2 > m \iff \begin{array}{rl} |x| > \sqrt{m} & \text{für } m > 0, \\ x \in \mathbb{R} & \text{für } m \leq 0. \end{array} \iff \begin{array}{rl} x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\sqrt{m}, \sqrt{m}\right] & \text{für } m > 0, \\ x \in \mathbb{R} & \text{für } m \leq 0. \end{array}$$

4. Unter welchen Voraussetzungen an die reellen Zahlen a, b, c und d sind die Aussagen $ab > cd$ und $\frac{a}{d} > \frac{c}{b}$ äquivalent?

$$\left((bd > 0) \vee \left(a^2 + c^2 = 0\right) \vee ((bd = 0) \wedge (ab \leq cd))\right) \iff \left((ab > cd) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d} > \frac{c}{b}\right)\right)$$

Das Rechnen mit Beträgen

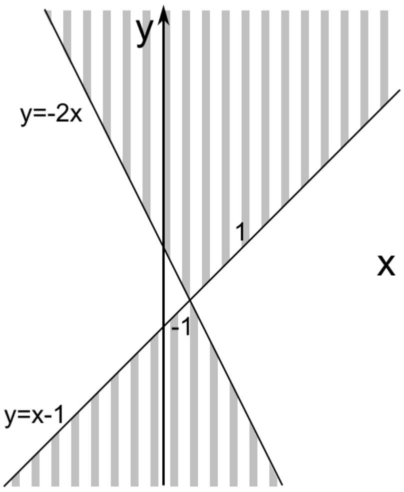
1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } |x-2| < 1, & x \in (1,3), \\
\text{b) } |x+1| \geq 4, & x \in \mathbb{R} \setminus (-5,3), \\
\text{c) } |2x+1| = |x+1| + 1, & x \in \{-1, 1\}\,, \\
\text{d) } \ln|x+4| > 1, & x \in \mathbb{R} \setminus [-e-4, e-4]\,.
\end{array}$$

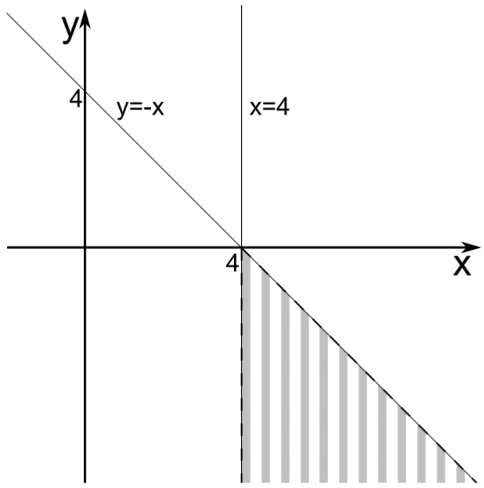
2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } |x-2| < |x-3|, & x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right), \\
\text{b) } 3 < |x+2| \leq 5, & x \in [-7,-5) \cup (1,3]\,, \\
\text{c) } |x+2| + |x-2| \leq 12, & x \in [-6, 6]\,, \\
\text{d) } ||x-1| + x| + |x| < 3, & x \in \left(-2, \frac{4}{3}\right), \\
\text{e) } |x+2| - |x| > 1, & x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right), \\
\text{f) } ||x+1| - |x-1|| < 1, & x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).
\end{array}$$

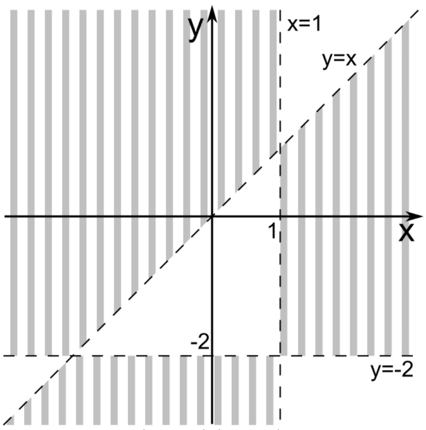
3. Ermitteln Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ folgender Ungleichungen und Ungleichungssysteme in zwei Variablen und stellen Sie $\mathcal{L}$ in einem xy-Koordinatensystem dar:



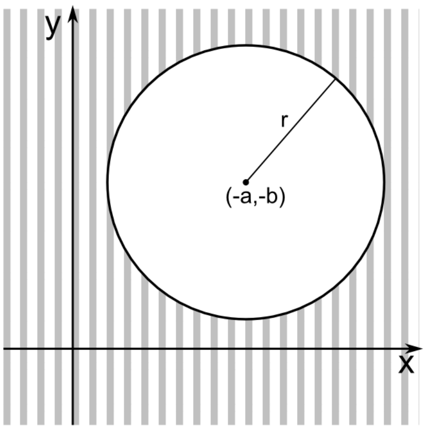
(a) $(2x+y)(y-x+1) \geq 0$



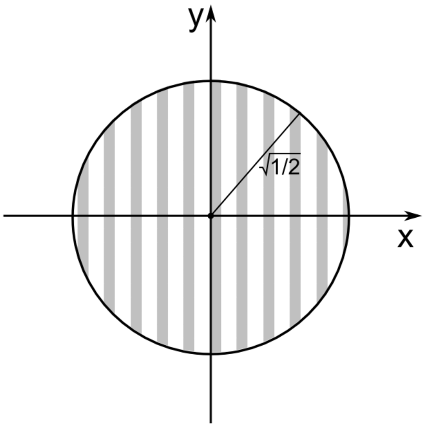
(b) $x-2>2, x+y<4$



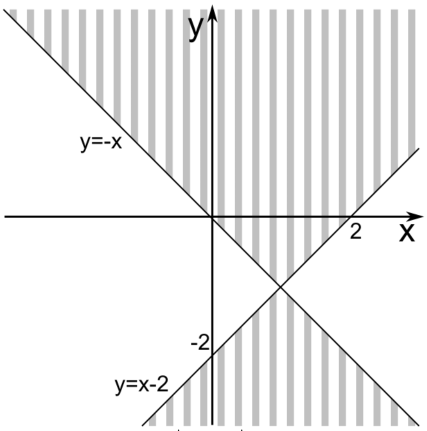
(c) $\dfrac{(x-1)(y+2)}{y-x} < 0$



(d) $(x+a)^2 + (y+b)^2 \geq r^2$



(e) $|x-y|^2 + |x+y|^2 \leq 1$



(f) $\dfrac{|x-1|}{|y+1|} \leq 1$

4. Stellen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $y = 2|x-1| - |x-2|$ grafisch dar.