

Übung Elementarmathematik im WS 2010/11

Lösung zum 1. Übungsblatt

Umformung von Termen

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{48ax}{49by} \cdot \frac{63ay}{32bx} &= \frac{27a^2}{14b^2}, & \text{b) } \frac{4}{15}xy \cdot \frac{25x}{28y} &= \frac{5x^2}{21}, & \text{c) } \frac{45ac}{56bd} : \frac{81ad}{49bc} &= \frac{35c^2}{72d^2}, \\ \text{d) } \frac{99ac}{35b} : \left(\frac{11}{14}ab\right) &= \frac{18c}{5b^2}, & \text{e) } \frac{a^3 - b^3}{a - b} &= a^2 + ab + b^2, & \text{f) } \frac{3x - 8}{21} - \frac{x + 2}{7} - \frac{x}{3} &= -\frac{2 + x}{3}. \end{aligned}$$

2. Zerlegen Sie folgende Terme in Faktoren:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3ax - 6ay - 15bx + 30by, & & \text{b) } 8ax + 12bx - 10ay - 15by, \\ & = 3(a - 5b)(x - 2y) & & = (4x - 5y)(2a + 3b) \\ \\ \text{c) } 2ax + 3bx - 2ay - 3by + 4az + 6bz, & & \text{d) } 18r^2 - 45rs^2 + 14rs - 35s^3. \\ & = (x - y + 2z)(2a + 3b) & & = (9r + 7s)(2r - 5s^2) \end{aligned}$$

3. Vereinfachen Sie

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2c - 5b}{6ab - 10b^2} - \frac{5(2c - 3a)}{18a^2 - 30ab} &= \frac{c}{3ab}, & \text{b) } \frac{a}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a + b} &= \frac{a^2 + b^2}{(a - b)^2(a + b)}, \\ \text{c) } \frac{a + 1}{a^2 - a} - \frac{a - 1}{a^2 + a} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a^2 - 1} &= \frac{1}{a}, & \text{d) } \frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + xy} &= 1. \end{aligned}$$

4. Beseitigen Sie die Doppelbrüche

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{y}}{\frac{5}{x} - \frac{3}{y}} &= \frac{3y - 5x}{5y - 3x}, & \text{b) } \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}} &= \frac{x + y}{x - y}, \\ \text{c) } \frac{\frac{a + 1}{a - 1} - 1}{\frac{a + 1}{a - 1} + 1} &= \frac{1}{a}, & \text{d) } \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 2}} &= \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-x^2 + 2}. \end{aligned}$$

5. Führen Sie eine Polynomdivision durch

- a) $(x^3 - 2xy^2 + y^3) : (x - y) = x^2 + xy - y^2$,
 b) $(9a^3 - 6a^2b - 2ab^2 + 4b^3) : (3a + 2b) = 3a^2 - 4ab + 2b^2$,
 c) $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y) = 3x^2 + 2xy - y^2$,
 d) $(25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2) = 5x^2 - 7ax + 5a^2$.

6. Stellen Sie folgende Formeln nach jeder der darin vorkommenden Variablen um:

$$\text{a) } a(1 - b^2) = c + 2ac, \quad a = \frac{c}{1 - b^2 - 2c},$$

$$b = \sqrt{\left| \frac{c + 2ac - a}{a} \right|},$$

$$c = \frac{a(1 - b^2)}{1 + 2a},$$

$$\text{b) } \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{r + 1}{s}, \quad s = \frac{(r + 1)(n + 1)}{1 - n},$$

$$r = \frac{s(1 - n)}{n + 1} - 1,$$

$$n = \frac{s - r - 1}{s + r + 1},$$

$$\text{c) } \frac{2m + 3(m + n)}{2m + n} = \frac{1}{p + 1}, \quad p = \frac{2m + n}{5m + 3n} - 1,$$

$$m = -\frac{3np + 2n}{5p + 3},$$

$$n = -\frac{5mp + 3m}{3p + 2},$$

$$\text{d) } ab - F = \frac{qa}{q - 1}, \quad F = ab - \frac{qa}{q - 1},$$

$$b = \frac{aq + Fq - F}{a},$$

$$q = \frac{F - ab}{a - ab + F},$$

$$a = \frac{F - gF}{q - qb + b}.$$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x und führen Sie die Probe durch:

$$\text{a) } \frac{4}{x-5} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-7} = \frac{4}{x-4}, \quad \text{b) } \frac{x+7}{x+1} + \frac{x+9}{x+2} = \frac{4(x+8)}{2x+3},$$

$$x = 1$$

$$x = 5$$

$$\text{c) } a(2x - c) - ab = c(2x - a) + ab, \quad \text{d) } (a - 2b)(b + x) = 6b^2 + a(2a - 7b).$$

$$x = \frac{ab}{a - c}$$

$$x = 2a - 4b$$

Proportionen

1. Aus 4 kg Garn kann man 3 m^2 Tuch weben. Wieviel m^2 Tuch kann man aus 22 kg Garn herstellen? = 16,5 m^2
2. Auf einer Baustelle haben 12 Arbeiter 16 Tage zu tun. Wie lange würden 16 Arbeiter benötigen? = 12 Tage
3. Bei einer Inventur nahmen 6 Verkäuferinnen in 8 Stunden 5.600 Artikel auf. Wie lange würden 9 Verkäuferinnen in einer gleichartigen Abteilung für die Aufnahme von 7.350 Artikeln brauchen? = 7 h
4. Bei täglich 8-stündiger Brennzeit benötigen 24 Lampen in 10 Tagen 192 kWh. Wieviel kWh verbrauchen 16 Lampen in 30 Tagen bei einer täglichen Brennzeit von 6 Stunden? = 288 kWh

Prozentrechnung

1. Ein Lieferant gewährt bei Barzahlung einen sofortigen Preisnachlass von 2,5 % . Wie hoch ist der Betrag, den wir bei einem Rechnungsbetrag von 8.000,00 € zahlen müssen? = 7.800,00 €
2. Ein Artikel wird für 550,00 € eingekauft und mit 770,00 € ausgezeichnet. Wieviel % beträgt der Aufschlag? = 40,0 %
3. Für eine Ware, auf die 8 % Rabatt gewährt wurde, zahlt man 460,00 €. Wie teuer war sie ursprünglich. = 500,00 €

Summenzeichen

1. Schreiben Sie die Summen ausführlich auf und berechnen Sie e) und f):

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{j=5}^{27} b_j, & \quad \text{b) } \sum_{i=1}^3 a_i b_i, & \quad \text{c) } \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{j=1}^3 b_{ij}, \\ \text{d) } \sum_{k=n}^m a_k^k, & \quad \text{e) } \sum_{i=1}^N i = \frac{N(N+1)}{2}, & \quad \text{f) } 1 + \sum_{n=0}^5 2^n = 2^6. \end{aligned}$$

2. Fassen Sie mit Hilfe von Summenzeichen zusammen:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_0 b_0^2 + a_2 b_2^2 + \cdots + a_{2n} b_{2n}^2 &= \sum_{i=0}^n a_{2i} b_{2i}^2, \\ \text{b) } 5x_1 x_2 + 5x_2 x_3 + \cdots + 5x_n x_{n+1} &= \sum_{i=1}^n 5x_i x_{i+1} = 5 \sum_{i=1}^n x_i x_{i+1}, \\ \text{c) } a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{im} x_m &= \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k, \\ \text{d) } a_1^2 + a_2^4 + a_3^8 + a_4^{16} + a_5^{32} &= \sum_{i=1}^5 a_i^{2^i}. \end{aligned}$$